TP 1

On rappelle que la commande `help` X permet d'obtenir une aide détaillée sur la commande X.

Exercice 1 Visualisation des lois discrètes

1. (a) Exécuter le code suivant, qui permet de visualiser les résultats de 100 tirages indépendants selon la loi binomiale $B(20, 1/5)$ et de comparer avec la valeur théorique.

```
X = grand(100,1,"bin",20,0.2)
F = tabul(X)   // tableau des effectifs
F(:,2) = F(:,2)/100
plot2d3(F(:,1),F(:,2))
plot2d(0:20,binomial(0.2,20),style=[-2])
```

   (b) Qu'observe-t-on quand on remplace 100 par une valeur plus grande ? Quel théorème justifie cela ?

   (c) Visualisez de manière similaire les loi de Poisson $P(1)$, $P(4)$ et $P(50)$.

   (d) A quoi ressemble le graphique obtenu pour $P(4)$? Pourquoi ?

   (e) A quoi ressemble le graphique obtenu pour $P(50)$? Pourquoi ?

   (f) On a vu le résultat suivant : si X et Y sont indépendantes, avec $X \sim P(\lambda)$ et $Y \sim P(\mu)$, alors $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$. Vérifiez visuellement ce réstulat pour $\lambda = 1$, $\mu = 2$.

   (g) (*) Comparer le temps mis par scilab pour générer des v.a. de loi $B(10^2, 10^{-2})$ et $B(10^9, 10^{-9})$. Pourquoi le résultat est-il surprenant ?

2. (a) En utilisant la commande `cumsum`, modifier le code de la question (1a) pour qu'il trace la fonction de répartition (empirique et théorique).

   (b) Si $X \sim P(2)$ et $Y \sim P(3)$, tracer sur un même graphe les fonctions de répartitions empiriques de F_X et F_Y et conjecturer une inégalité entre ces fonctions. (*) Sauriez-vous la démontrer ?

Exercice 2 Loi des grands nombres

Le but de cet exercice est de visualiser la loi forte des grands nombres. On se donne une suite de v.a. i.i.d. $(X_n)_{n\geqslant 1}$, et on s'intéresse au comportement asymptotique de

$$Y_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

en fonction de différents choix pour la loi de X_1.

1. (a) On suppose que X_n suit la loi uniforme dans l'intervalle $[0, 2]$. Utiliser la commande `grand` pour générer un tableau `X` contenant les valeurs des v.a. $(X_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$, pour $N = 10^3$.

   (b) En une seule instruction, générez un tableau `Y` contenant les valeurs des v.a. $(Y_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$.

   (c) Visualisez le comportement de la suite (Y_n) à l'aide de la commande `plot([1:N],Y)`. Qu'observe-t-on ?

2. Reprendre les questions précédentes lorsque X_n suit la loi de $1/U$, où U suit la loi uniforme dans l'intervalle $[0, 2]$. Qu'observe-t-on ? (*) Sauriez-vous le démontrer ?

3. Reprendre les questions précédentes lorsque X_n suit la loi de $1/V$, où V suit la loi uniforme dans l'intervalle $[-1, 1]$. Qu'observe-t-on ?

Exercice 3 Théorème central limite

1. Reprendre le code de l'exercice précédent pour visualiser la suite

$$Z_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n - n}{\sqrt{n}},$$

où les (X_i) sont i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 2]$. Qu'observe-t-on ?

2. On suppose désormais que les (X_i) sont i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, et on pose $S_N = \frac{X_1+\cdots+X_N}{\sqrt{N}}$. Comprendre et exécuter le code suivant qui permet de tracer l'histrogramme de n copies indépendantes de la variable S_N. Faites varier n et N ; qu'observe-t-on ?

```
n=100
N=100
X=(2*grand(1,n,"bin",N,1/2)-N)/sqrt(N);
histplot(int(sqrt(n)),X)
```

3. Que fait le code suivant ? Pourquoi est-ce pertinent ?

```
T=[-3:0.1:3]
U=exp(-T.^2/2)/sqrt(2*%pi)
plot(T,U)
```

Exercice 4 Le paradoxe des anniversaires

La probabilité pour que, dans un groupe de K personnes, deux au moins aient la même date d'anniversaire est beaucoup plus élevée que ce que l'on pourrait croire. On modélise les K dates d'anniversaire par des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme dans $\{1, \ldots, 365\}$ (on ne tient pas compte des années bissextiles).

1. Écrire la function `p=pcoincide(K)` renvoyant (par un calcul exact !) cette probabilité p de coïncidence en fonction du nombre K de gens dans le groupe.
2. Tracer la courbe de ces probabilités pour un nombre d'individus compris entre 2 et 365 avec la commande `plot2d(2:365, feval(2:365, pcoincide))`. À partir de combien dépasse-t-elle 50%, 75%... ?
3. Pour vérifier statistiquement la valeur de `pcoincide(23)`, on simulera un grand nombre N (par exemple 1000) de populations de 23 personnes, dont les dates de naissance seront tirées au hasard avec probabilité uniforme sur les 365 jours de l'année, on calculera la fréquence de réalisation de l'événement «coïncidence» et on constatera qu'elle est proche de la valeur théorique.

Exercice 5 Collection de vignettes

Une marque de céréales décide d'inclure dans chaque paquet une image de l'un des N mathématiciens les plus célèbres pour inciter les enfants à les collectionner. On suppose que les images sont placées dans les paquets de manière indépendante selon la loi uniforme sur $\{1, \ldots, N\}$. Écrire une fonction `vignette(N)` qui renvoie une simulation du nombre X_N de paquets qu'il a fallu acheter pour avoir la collection complète des N vignettes. Saurez-vous deviner à quelle vitesse X_N tend vers l'infini ?