TP 2

On rappelle que la commande `help` X permet d'obtenir une aide détaillée sur la commande X.

Exercice 1 Processus de branchement

On s'intéresse à la simulation d'un processus de branchement. On rappelle qu'on peut le définir par récurrence à partir du nombre initial d'individus Z_0 comme

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{n,i}$$

à partir de v.a. i.i.d. $(\xi_{n,i})$ à valeurs dans $\mathbf{N}$, dont on note μ la loi, appelée loi de branchement.

1. (a) Comprendre et exécuter le code suivant qui simule 50 générations d'un processus, pour la loi de branchement $\mu(0) = 1/4$, $\mu(1) = 1/2$, $\mu(2) = 1/4$.

```
mu=[0.25,0.5,0.25];
T=1000; // nombre de générations simulées
Z=zeros(1,T+1)
Z(1)=30; // population initiale
for t=1:T
    u=rand(1,Z(t));
    M=zeros(1,Z(t));
    for k=1:size(mu,2)
        M(1:Z(t))=M(1:Z(t)) + (u>=sum(mu(1:k)));
    end
Z(t+1)=sum(M);
end
```

   (b) Tracer le graphe du nombre d'individus en fonction du temps. Vous pouvez effectuer plusieurs simulations pour voir si le comportement observé est le même.

   (c) Que prévoit la théorie ? Est-ce cohérent avec les observations de la question précédente ?

2. Comparer graphiquement les comportements pour les lois initiales suivantes et vérifier si cela est conforme à ce que prédit la théorie (attention, commencer par simuler un petit nombre de générations car la taille de la population peut parfois croître exponentiellement vite)

   (a) $\mu(0) = 0.25$, $\mu(1) = 0.55$, $\mu(2) = 0.2$

   (b) $\mu(0) = 0.25$, $\mu(1) = 0.45$, $\mu(2) = 0.3$

   (c) $\mu(0) = 0.9$, $\mu(10) = 0.1$

   (d) $\mu(0) = 0.9$, $\mu(11) = 0.1$

3. On reprend la loi de branchement de la question 2b en supposant que $Z_0 = 1$.

   (a) Calculer la probabilité d'extinction théorique pour ce processus.

   (b) Vérifier expérimentalement que la probabilité d'extinction observée est la même (simuler un grand nombre de populations, et regarder quelle proportion s'éteint).

Exercice 2 Ruine du joueur

James Bond arrive dans un casino avec a euros en poche. Il joue à la roulette en pariant à chaque fois 1 euro sur "pair". Sa fortune évolue au cours du temps de la manière suivante

$$S_0 = a, \quad S_n = a + \sum_{k=1}^{n} X_k, \ n \geqslant 1,$$

où les (X_k) sont i.i.d. suivant la loi $\mathbf{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_1 = -1) = p \in]0, 1[$. Le jeu lui est favorable si $p > 1/2$, défavorable si $p < 1/2$; si $p = 1/2$ le jeu est équitable. James Bond décide de s'arrêter lorsqu'il aura gagné b euros, à moins qu'il ne soit ruiné avant. La partie d'arrête donc au bout d'un temps

$$T = \inf\{n \geqslant 1 \ : \ S_n = 0 \text{ ou } S_n = a + b\}.$$

1. Écrire une fonction `[T,S]=roulette(a,b,p)` qui simule une partie de roulette et renvoie T (la durée de la partie) et $S = S_T \in \{0, a + b\}$ (la fortune de James Bond à la fin de la partie).
2. Estimer par la simulation les valeurs $\mathbf{E}[T]$, $\mathbf{P}(S_T = 0)$ et $\mathbf{P}(S_T = a + b)$. Pour $p = 1/2$ la théorie prédit $\mathbf{E}[T] = ab$, $\mathbf{P}(S_T = 0) = \frac{b}{a+b}$ et $\mathbf{P}(S_T = a + b) = \frac{a}{a+b}$. Retouvez-vous ces valeurs ?
3. Pour les modèles habituels de roulette, on a $p = \frac{18}{37}$. James Bond arrive avec 100 euros et veut gagner 10 euros. Quelle est la probabilité qu'il y parvienne ? Même question s'il arrive avec 1000 euros et veut gagner 100 euros.

Exercice 3 Permutations aléatoires

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère une permutation aléatoire σ de $\{1, \ldots, n\}$, choisie selon la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

1. Consultez l'aide de la fonction `grand` et écrivez une commande qui génère une telle permutation.
2. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on appelle *descente* de σ un indice $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ tel que $\sigma(i) > \sigma(i + 1)$. Écrire une fonction `descentes(n)` qui calcule le nombre de descentes d'une permutation aléatoire σ.
3. Pour différentes valeurs de n, par exemple $n = 3$, $n = 10$, $n = 30$, $n = 100$, calculer la moyenne du nombre de descentes lorsqu'on effectue K tirages. Lorsque K est suffisamment grand, cette valeur doit s'approcher de l'espérance.
4. Deviner une formule qui en fonction de n donne l'espérance du nombre de descentes.
5. (*) Démontrez la formule devinée à la question précédente.

Exercice 4 Promenade aléatoire modulo 10

On considère l'ensemble $\{0, 1, \cdots, 9\}$ en convenant que le successeur de 9 est 0. Un mobile partant de 0, s'y déplace selon la règle suivante : à chaque instant, soit il reste sur place avec une probabilité $0 < p < 1$, soit il avance d'un cran avec la probabilté $1 - p$.

1. Écrire la fonction `y=suivant(x,p)` donnant la position aléatoire suivante de x.
2. Tracer (dans la même fenêtre) 5 trajectoires issues de 0, aux instants de 0 à 100 (on choisira la valeur $p = 0.3$).
3. On note T le temps de retour au point 0, c'est le premier instant strictement après l'instant initial 0 pour lequel le mobile se trouve en 0 (en particulier, lorsque le mobile reste en 0 au premier coup, ce qui se produit avec la probabilité p, ce temps de retour T vaut 1). Écrire la fonction `t=T(p)` simulant cet instant aléatoire.
4. Estimer par la simulation $\mathbf{E}[T]$ pour différentes valeurs du paramètre p. Que remarquez-vous ?
5. (***) Démontrez le résultat conjecturé à la question précédente.

Exercice 5 Quadrilatère aléatoire dans un disque

Soit $\Delta \subset \mathbf{R}^2$ le disque unité. On appelle loi uniforme dans Δ la loi de densité $(x, y) \mapsto \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{\{x^2+y^2 \leqslant 1\}}$.

1. Soient A, B, C trois points choisis indépendamment selon la loi uniforme dans Δ. Estimer par la simulation l'espérance de l'aire du triangle qu'ils délimitent. On pourra utiliser la formule suivante : l'aire du triangle formé par les points de coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3) est
$$\frac{1}{2}\left|\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\right|.$$
2. (***) On tire A, B, C, D quatre points au hasard uniformément dans Δ. Quelle est la probabilité qu'ils soient les sommets d'un quadrilatère convexe ?