Université Lyon 1 Mathématiques
L3 Probabilités et Statistiques

Examen du 28 mai 2019
Durée : 2 heures.

Tous les documents sont interdits.

Rappels. Une variable aléatoire X suit une loi gaussienne $\mathsf{N}(0,\sigma^2)$ si la densité de X est la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Dans ce cas, la fonction caractéristique de X est donnée pour $t \in \mathbf{R}$ par $\Phi_X(t) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$.

Exercice 1

1. Puisque X et Y sont indépendantes, on a pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{\tau^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{(\sigma^2+\tau^2)t^2}{2}\right),$$

qui est la fonction caractéristique d'une v.a. de loi $\mathsf{N}(0,\sigma^2+\tau^2)$. Puisque la fonction caractéristique caractérise la loi, on en déduit que $X+Y$ suit la loi $\mathsf{N}(0,\sigma^2+\tau^2)$.

2. Si $X \sim \mathsf{P}(\lambda)$, on a pour $t \in \mathbf{R}$,

$$\Phi_X(t) = \mathbf{E}[\exp(itX)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \exp(itn) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Si $X \sim \mathsf{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathsf{P}(\mu)$ sont indépendantes, on a pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} e^{\mu(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)}$$

et donc $X+Y \sim \mathsf{P}(\lambda+\mu)$.

Exercice 2 Voir cours

Exercice 3

1. On a

$$\mathbf{E}[|X|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \exp(-x^2/2) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x \exp(-x^2/2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-\exp(-x^2/2)\right]_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

2. Comme la densité de la loi $\mathsf{N}(0,1)$ est paire, $-X$ a même loi que X (et de même pour Y et Z). Comme $(-X,-Y,-Z)$ sont indépendantes, les vecteurs aléatoires (X,Y,Z) et $(-X,-Y,-Z)$ ont même loi, et donc

$$\mathbf{E}[\max(X,Y,Z)] = \mathbf{E}[\max(-X,-Y,-Z)] = \mathbf{E}[-\min(X,Y,Z)] = -\mathbf{E}[\min(X,Y,Z)].$$

3. On écrit $\max(X,Y,Z) - \min(X,Y,Z) = \frac{|X-Y|+|Y-Z|+|Z-X|}{2}$ et on prend l'espérance. Les variables aléatoires $X-Y, Y-Z$ et $Z-X$ sont de loi $\mathsf{N}(0,2)$ (d'après le résultat démonté à l'exercice 1.1), donc $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ est de loi $\mathsf{N}(0,1)$, et d'après la question 1. on a $\mathbf{E}[|X-Y|] = 2/\sqrt{\pi}$. On a donc d'après la question 2. $2\mathbf{E}[\max(X,Y,Z)] = \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, donc $\mathbf{E}[\max(X,Y,Z)] = \frac{3}{2\sqrt{\pi}}$.
4. Puisque les deux membres de l'égalité sont inchangés par permutation de a, b, c, on peut supposer que $a \geqslant b \geqslant c$, et alors le résultat est immédiat.

Exercice 4

1. (a) Pour n assez grand, on a $[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}] \subset [-1, 1]$, et alors

$$p_n(a,b) = \mathbf{P}(nU_n \in [a,b]) = \mathbf{P}(U_n \in [a/n, b/n]) = \frac{b-a}{2n}$$

et donc $\sum p_n(a,b) = +\infty$.

(b) D'après la question précédente et le lemme de Borel–Cantelli (II), applicable puisque les événements $\{nU_n \in [a,b]\}_{n\in\mathbf{N}}$ sont indépendants, presque sûrement une infinité des événements $\{nU_n \in [a,b]\}$ sont vrais.

(c) On remarque qu'une suite réelle est dense dans $\mathbf{R}$ si et seulement si tout intervalle $[a,b]$ avec $a < b$ rationnels contient un terme de la suite. Par la question précédente, et puisqu'une intersection dénombrable d'événements de probabilité 1 est de probabilité 1, on a donc que la suite (nU_n) est presque sûrement dense dans $\mathbf{R}$.

2. Soit $A \in \mathbf{N}$. Pour n sufissamment grand, $A/n^2 \leqslant 1$ et donc $\mathbf{P}(n^2|U_n| \leqslant A) = \mathbf{P}(|U_n| \leqslant A/n^2) = A/n^2$. On en déduit que $\sum_n \mathbf{P}(n^2|U_n| \leqslant A) < +\infty$, et donc par le lemme de Borel–Cantelli (I), presque sûrement $n^2|U_n| > A$ pour n assez grand. Puisqu'une intersection dénombrable d'événements de probabilité 1 est de probabilité 1, on a

$$\mathbf{P}(\forall A \in \mathbf{N}, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, n^2|U_n| > A) = 1$$

et donc la suite $(n^2|U_n|)$ tend presque sûrement vers $+\infty$.

Exercice 5

1. Par la formule du transfert, le changement de variable linéaire $y = \theta x$ et la formule rappelée

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty x \cdot \theta^2 x e^{-\theta x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\theta}\int_0^\infty y^2 e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\theta},$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2 \cdot \theta^2 x e^{-\theta x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty y^3 e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{6}{\theta^2},$$

donc $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = 2/\theta^2$. Le théorème central limite affirme alors la convergence en loi pour $n \to \infty$

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - \frac{2n}{\theta}}{\sqrt{n}} \longrightarrow Z$$

où Z est une v.a. de loi $\mathsf{N}(0, 2/\theta^2)$.

2. Il s'agit de maximiser la fonction, à $x_1, \ldots, x_n > 0$ fixés,

$$F : \theta \mapsto \prod_{i=1}^n \theta^2 x_i e^{-\theta x_i} = \theta^{2n} e^{-\theta \sum x_i} \cdot \prod x_i.$$

La dérivée de $\log F$ est la fonction $\theta \mapsto \frac{2n}{\theta} - \sum x_i$, et donc F est maximale en $\theta = \frac{2n}{x_1 + \cdots x_n}$. Ainsi, $\hat{\theta}$ est bien l'estimateur par maximum de vraisemblance.

3. Par la loi faible des grands nombres, la suite $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ converge en probabilité vers $\mathbf{E}[X_1] = \frac{2}{\theta}$, et donc $\hat{\theta}_n$ converge en probabilité vers θ. L'estimateur $\hat{\theta}$ est consistant.

4. Le résultat de la question 1. se reformule en disant que $2\sqrt{n}(\frac{1}{\hat{\theta}_n} - \frac{1}{\theta})$ converge en loi vers Z. D'après l'indication (appliquée avec $v_n = 2\sqrt{n}$, $Z_n = 1/\hat{\theta}_n$ et $x = 1/\theta$), cela implique que $2\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ converge en loi vers $-\theta^2 Z$. Comme $-\theta^2 Z$ n'est pas une v.a. constante, on en déduit que la vitesse de $\hat{\theta}$ est $\sqrt{n}$ (ou, de manière équivalente, $2\sqrt{n}$).