Université Lyon 1 — Mathématiques

L3 Probabilités et Statistiques

Examen du 28 mai 2019

Durée : 2 heures.

Tous les documents sont interdits.

Rappels. Une variable aléatoire X suit une loi gaussienne $\mathsf{N}(0, \sigma^2)$ si la densité de X est la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Dans ce cas, la fonction caractéristique de X est donnée pour $t \in \mathbf{R}$ par $\Phi_X(t) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$.

Exercice 1

1. En utilisant les rappels ci-dessus, déterminer quelle est la loi de $X+Y$ lorsque X et Y sont des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathsf{N}(0, \sigma^2)$ et $\mathsf{N}(0, \tau^2)$.
2. Calculer la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre λ. En déduire quelle est la loi de la somme de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ et μ.

Exercice 2 (question de cours)

1. Donner la définition de la convergence en loi.
2. Donner un énoncé équivalent à la convergence en loi en termes de fonctions caractéristiques.
3. Donner un énoncé équivalent à la convergence en loi en termes de fonctions de répartition.
4. Démontrer au choix une implication parmi

$$1. \Rightarrow 2. \quad 2. \Rightarrow 1. \quad 1. \Rightarrow 3. \quad 3. \Rightarrow 1. \quad 2. \Rightarrow 3. \quad 3. \Rightarrow 2.$$

Exercice 3

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de loi $\mathsf{N}(0,1)$.

1. Calculer $\mathbf{E}[|X|]$.
2. Montrer sans calculs que $\mathbf{E}[\max(X,Y,Z)] = -\mathbf{E}[\min(X,Y,Z)]$.
3. Calculer $\mathbf{E}[\max(X,Y,Z)]$ en utilisant la formule suivante, valable pour a, b, c réels,

$$\max(a,b,c) - \min(a,b,c) = \frac{|a-b| + |b-c| + |c-a|}{2}. \tag{1}$$

4. Démontrer la formule (1).

Exercice 4

Soient $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme dans $]-1,1[$.

1. (a) Soient $a < b$ des réels, et $p_n(a,b) = \mathbf{P}(nU_n \in [a,b])$. Montrer que $\sum p_n(a,b) = +\infty$.
   (b) En déduire que presque sûrement l'intervalle $[a,b]$ contient une infinité de termes de la suite $(nU_n)_{n\geqslant 1}$.
   (c) En déduire que la suite $(nU_n)_{n\geqslant 1}$ est presque sûrement dense dans $\mathbf{R}$.
2. Montrer que la suite $(n^2|U_n|)_{n\geqslant 1}$ tend presque sûrement vers $+\infty$.

Exercice 5

On rappelle la formule, pour un entier n

$$\int_0^\infty x^n \exp(-x)\,\mathrm{d}x = n!$$

Pour un paramètre $\theta > 0$ inconnu, on note μ_θ la mesure de probabilité de densité

$$x \mapsto \theta^2 x e^{-\theta x} \mathbf{1}_{\{x \geqslant 0\}}.$$

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ_θ.

1. Calculer l'espérance et la variance de X_1. Que dit le théorème central limite pour la suite (X_n) ?
2. Montrer que l'estimateur par maximum de vraisemblance du paramètre θ est donné par

$$\hat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{2n}{X_1 + \cdots + X_n}.$$

3. Montrer que l'estimateur $\hat{\theta}$ est consistant.
4. Calculer la vitesse de l'estimateur $\hat{\theta}$.
Indication : on pourra utiliser la forme suivante de la δ-méthode : si, pour une suite (v_n) tendant vers l'infini, (Z_n) des v.a. strictement positives et $x > 0$, on a $v_n(Z_n - x) \xrightarrow{\text{loi}} Z$, alors on a aussi $v_n(Z_n^{-1} - x^{-1}) \xrightarrow{\text{loi}} -x^{-2} Z$.