Université Lyon 1 — Mathématiques

L3 Probabilités et Statistiques

Examen du 26 mars 2019

Durée : 2 heures.

Tous les documents sont interdits.

Exercice 1 (8 points)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On dit qu'une v.a. X suit la loi Gamma(n) si elle a pour densité

$$x \mapsto \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-x) \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

1. Soit X une v.a. de loi Gamma(1). Quelle autre nom porte la loi de X ? Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{Var}(X)$.
2. Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi Gamma(1). Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
   (a) Calculer l'espérance et la variance de S_n.
   (b) Est-ce que la suite (S_n/n) converge en probabilité ?
   (c) Montrer que S_n suit la loi Gamma(n).
3. Soit T une v.a. de loi Gamma(n) pour $n \in \mathbf{N}^*$.
   (a) Calculer la densité (notée h) de la variable aléatoire $Z = \log(T/n)$.
   (b) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $h(x) \leqslant h(-x)$.
   Indication. *On pourra utiliser l'inégalité* $x \leqslant \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *pour* $x \geqslant 0$ *(bonus si vous la démontrez)*
   (c) ($\star$) En déduire que $\mathbf{P}(T \geqslant n) \leqslant 1/2$.

Exercice 2 (7 points)

Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On rappelle que sa fonction génératrice est $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = k)s^k$ pour $s \in [0, 1]$.

1. On suppose que X est bornée. Exprimer $\mathbf{E}[X]$ en fonction de G et montrer que
$$\mathrm{Var}(X) = G''(1) + G'(1)(1 - G'(1)).$$
2. Soit $p \in [0, \frac{1}{2}]$ et X une v.a. dans $\{0, 1, 2\}$ telle que $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 2) = p$. On note Z_n le nombre d'individus à la génération n d'un processus de branchement où on suppose $Z_0 = 1$ et $Z_1 \sim_{\text{loi}} X$.
   (a) Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.
   (b) Quelle est la probabilité d'extinction du processus de branchement ?
   (c) Montrer que pour tout réel $a > \mathbf{E}[X]$, il existe $r \in [0, 1[$ tel que
   $$\mathbf{P}(Z_n \geqslant a^n) \leqslant r^n.$$
   (d) En déduire que $\left(Z_n^{1/n}\right)_{n \geqslant 1}$ est bornée p.s.

Exercice 3 (6 points)

Soit $X_n, n \geqslant 1$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. On rappelle que leur densité est $\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) \exp(-x)$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon \geqslant 0$,
$$\mathbf{P}\left(X_n > (1 + \varepsilon) \log n\right) = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}.$$

2. En choisissant $\varepsilon > 0$, en déduire que p.s.,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \leqslant 1.$$

3. En utilisant les questions précédentes, montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1.$$

4. On pose $Z_n = \frac{\max(X_1,\cdots,X_n)}{\log n}$ pour tout $n \geqslant 2$, montrer que

$$\liminf_{n\to\infty} Z_n \geqslant 1, \text{ p.s.}$$

   Indication. *On pourra utiliser les événements* $\{Z_n \leqslant (1-\varepsilon)\log n\}$.