I.813

Chapitre 0

Actions de Groupes

Sommaire

1 Groupes, sous-groupes, morphismes, groupes engendrés

2 Actions de Groupes

3 Groupe quotient

Chapitre 1

Algèbre Linéaire

Sommaire

1 Matrices

Soit E_{ij} la matrice élémentaire de la base canonique de $\mathcal{M}_{pq}(K)$. La formule suivante est utile en pratique

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_j^k E_{il}.$$

C'est une version de la fameuse relation de Chasles.

Nous fixons ici une notation pour la matrice associée une application linéaire entre espaces vectoriels munis de bases et illustrons sa pertinence sur les formules de changement de bases.
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases de E et F respectivement. On note

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F\,\mathcal{B}_E}(f), \tag{1.1}$$

la matrice de f. Le coefficient (i, j) (ligne i et colonne j) est la i^{eme} coordonnées de l'image par f du j^{eme} vecteur de $\mathcal{B}_E$.
On remarquera que la base de l'espace d'arrivée survient en premier dans la notation. Cela est en cohérence avec la notation M_{ij} on encore avec le fait que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F\,\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_{\sharp\mathcal{B}_F\ \sharp\mathcal{B}_E}(k),$$

où k est le corps de base.
Pour $v \in E$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(v)$ le vecteur colonne constitué des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}_E$. Les seules formules à connaitre sont

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G\,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G\,\mathcal{B}_F}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F\,\mathcal{B}_E}(f) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(v)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F\,\mathcal{B}_E}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(v), \tag{1.2}$$

où $v \in E$, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.
Pour retenir la position des bases dans les formules (1.2), on pourra remarquer l'analogie avec la formule de Chasles : $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE}$.

Changement de base. Si $\mathcal{B}'_E$ est une seconde base de E, on considère les matrices de passage $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E\,\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E\,\mathcal{B}'_E}(\mathrm{Id}_E)$. En appliquant les formules (1.2) à $\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E$ et à $f \circ \mathrm{Id}_E = f$ on trouve

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E\,\mathcal{B}'_E}(\mathrm{Id}_E)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E\,\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E) = I_n, \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F\,\mathcal{B}_E}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E\,\mathcal{B}'_E}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F\,\mathcal{B}'_E}(f),$$

où n est la dimension de E. De manière analoge, on obtient les formules de changement de base PMP^{-1} et PMQ^{-1}.
On a aussi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E\,\mathcal{B}'_E}(\mathrm{Id}_E) = \begin{array}{cc} \mathcal{B}'_E & \\ \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} & \mathcal{B}_E. \end{array}$$

Opérations élémentaires.
On définit pour $\lambda \in K$ et i, j des indices :

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij} \qquad D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii} \qquad P_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}.$$

On a :
- $L_i \to L_i + \lambda L_j$ s'obtient par multiplication à gauche par $T_{ij}(\lambda)$ (pour tout $\lambda \in K$).
- $L_i \leftrightarrow L_j$ s'obtient par multiplication à gauche par P_{ij}.
- $L_i \to \lambda L_i$ s'obtient par multiplication à gauche par $D_i(\lambda)$ (pour tout λ **non nul** dans K.

On a les mêmes opérations sur les colonnes en multipliant à droite.

2 Dualité

2.1 Formes linéaires et bases duales

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Une *forme linéaire sur E* est une application linéaire de E dans k. On note E^* l'espace vectoriel constitué des formes linéaires. Observer que (1) est une base de k. Si $\mathcal{B}$ est une base de E et $\varphi \in E^*$, $\mathrm{Mat}_{(1)\,\mathcal{B}}(\varphi)$ est une matrice ligne dont les entrées sont les valeurs de φ aux éléments de $\mathcal{B}$.

Exemple 1. Toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ est donnée par une formule

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & ax + by \end{array}$$

pour des nombres réels fixés a et b.

Un exemple de forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$ est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto 2x + 4y - z + t.$$

Les formes linéaires coordonnées. Explicitons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. L'application e_i^* qui à un vecteur associe sa i^{eme} coordonnée dans la base $\mathcal{B}$ est une fome linéaire. De plus, $\mathrm{Mat}_{(1)\,\mathcal{B}}(\varphi) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ si et seulement si

$$\varphi = \lambda_1 e_1^* + \cdots + \lambda_n e_n^*.$$

On en déduit que $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base, notée $\mathcal{B}^*$ de E^*. La base $\mathcal{B}^*$ est appelée *base duale de $\mathcal{B}$*. En particulier $\dim(E^*) = n$. Remarquons aussi que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\varphi) = {}^t\mathrm{Mat}_{(1)\,\mathcal{B}}(\varphi)$. Observons aussi que la coordonnée λ_i de φ dans la base duale est

$$\lambda_i = \varphi(e_i) \quad \text{car} \quad e_j^*(e_i) = \delta_i^j. \tag{2.1}$$

Réciproquement, étant donnée une base $\mathcal{C}$ de E^*, on vérifie qu'il existe une unique base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B}^* = \mathcal{C}$. La base $\mathcal{B}$ est appelée *base anteduale de $\mathcal{C}$*.

Remarque. Contrairement à ce que peut laisser croire la notation, e_i^* dépend de la base $\mathcal{B}$ entière et pas seulement de e_i. Pour se convaincre de cela, regardons l'exemple suivant $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ est donnée par $\epsilon_1 = e_1$ et $\epsilon_2 = e_1 + e_2$. Soit $v = xe_1 + ye_2$ un vecteur. On a $v = (x - y)e_1 + y(e_1 + e_2) = (x - y)\epsilon_1 + y\epsilon_2$. Donc $\epsilon_1^*(v) = x - y$ ou encore $\epsilon_1^* = e_1^* - e_2^*$.

2.2 Hyperplans

Le noyau $\mathrm{Ker}\varphi$ d'une forme linéaire linéaire non nulle est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$ (par application directe du théorème de rang). Réciproquement pour tout sous-espace F de dimension $n-1$ de E, il existe une forme linéaire linéaire non nulle telle que $\mathrm{Ker}\varphi = F$. Un tel sous-espace vectoriel de F est appelé *hyperplan*.
Pour montrer la réciproque, on peut par exemple construire une base de E qui commence par une de F et considérer la base duale.

2.3 Bidualité

L'espace vectoriel E^* a lui-même un espace vectoriel dual E^{**} appelé bidual de E.

Théorème I.1. Isomorphisme avec le bidual

L'application linéaire
$$\begin{array}{rccc} \iota : & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & v & \longmapsto & \iota(v), \end{array}$$
où
$$\begin{array}{rccc} \iota(v) : & E^{*} & \longrightarrow & k \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi(v) \end{array}$$
est bien définie et est un isomorphisme.

La démonstration est laissée en exercice. On pourra aussi montrer que si $\mathcal{C}$ est une base de E^*, on a
$$\left(\iota^{-1}\mathcal{C}^*\right)^* = \mathcal{C}.$$

2.4 Orthogonalité

Pour F un sous-espace de E, on appelle
$$F^\perp = \{\varphi \in E^* \,:\, \forall v \in F \quad \varphi(v) = 0\},$$
l'orthogonal de F. On vérifie que

1. $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^* ;
2. si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une base de E telle que $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de F alors $(e^*_{k+1}, \dots, e^*_n)$ est une base de $F^\perp$;
3. $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

De manière similaire, pour G un sous-espace de E^*, on appelle
$$G^\circ = \{v \in E \,:\, \forall \varphi \in G \quad \varphi(v) = 0\},$$
l'ante-orthogonal de G. On vérifie que

1. G° est un sous-espace vectoriel de E ;
2. si $\mathcal{B} = (e^*_1, \dots, e^*_k, e^*_{k+1}, \dots, e^*_n)$ est une base de E^* telle que $(e^*_1, \dots, e^*_k)$ est une base de G alors $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une base de G° ;
3. $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$.

Quelques propriétés de ces constructions :

Théorème I.2: Propriétés de l'orthogonal et de l'anteorthogonal

1. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on a $(F^\perp)^\circ = F$.
2. Si G est un sous-espace vectoriel de E^*, on a $(G^\circ)^\perp = G$. De plus, $\iota(G^\circ) = G^\perp$.
3. Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors
$$(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp,$$
et
$$(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp.$$
4. Soit G_1 et G_2 deux sous-espaces vectoriels de E^*. Alors
$$(G_1 + G_2)^\circ = G_1^\circ \cap G_2^\circ,$$

et

$$(G_1 \cap G_2)^\circ = G_1^\circ + G_2^\circ.$$

Preuve

Les deux premières assertions découlent directement de la description des orthogonaux avec des bases.
En utilisant la deuxième assertion, la troisième est une conséquence de la dernière.
Montrons la dernière. Comme $G_1 \subset G_1+G_2$, on a $(G_1+G_2)^\circ \subset G_1^\circ$ puis que $(G_1+G_2)^\circ \subset G_1^\circ \cap G_2^\circ$.
Réciproquement soit $x \in G_1^\circ \cap G_2^\circ$. Soit $\psi_1 \in G_1$ et $\psi_2 \in G_2$. Alors

$$(\psi_1 + \psi_2)(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) = 0 + 0 = 0$$

et x appartient à $(G_1 + G_2)^\circ$. Finalement $(G_1 + G_2)^\circ = G_1^\circ \cap G_2^\circ$.

Comme $G_1 \cap G_2 \subset G_1$, on a $(G_1 \cap G_2)^\circ \supset G_1^\circ$. Comme $(G_1 \cap G_2)^\circ$ est un espace vectoriel, on en déduit par symétrie que $(G_1 \cap G_2)^\circ \supset G_1^\circ + G_2^\circ$.
Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
\dim(G_1^\circ + G_2^\circ) &= \dim(G_1^\circ) + \dim(G_2^\circ) - \dim(G_1^\circ \cap G_2^\circ) = \dim(G_1^\circ) + \dim(G_2^\circ) - \dim((G_1 + G_2)^\circ) \\
&= n - \dim(G_1) - \dim(G_2) + \dim(G_1) + \dim(G_2) - \dim(G_1 \cap G_2) \\
&= \dim((G_1 \cap G_2)^\circ)
\end{aligned}$$

Dans la première ligne, on a utilisé la formule de Grassmann puis l'égalité $(G_1 + G_2)^\circ = G_1^\circ \cap G_2^\circ$.
A la deuxième on utilise encore la formule de Grassmann.

2.5 Transposition

2.6 Définition et Matrices

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle *transposé de f* l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{cccc} {}^t f : & F^* & \longrightarrow & E^* \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f. \end{array}$$

Le lien avec la transposition des matrices est le suivant :

Théorème I.3: Matrice de la transposé

Soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases de E et F respectivement. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E^* \, \mathcal{B}_F^*}({}^t f) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \, \mathcal{B}_E}(f).$$

Preuve

Notons $(e_1, \dots, e_p)$ la base de E et $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_q)$ celle de F. L'entrée m_{ij} à la ligne i et la colonne j de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E^* \, \mathcal{B}_F^*}({}^t f)$ est la i^{eme} coordonnées de ${}^t f(\epsilon_j^*)$. D'après (2.1),

$$m_{ij} = \epsilon_j^* \circ f(e_i)$$

est la coordonnée en ϵ_j de $f(e_i)$, c'est-à-dire l'entrée (j,i) de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \, \mathcal{B}_E}(f)$.

Des formules faciles à démontrer

$${}^t(f + \lambda g) = {}^t f + \lambda {}^t g \qquad {}^t(f \circ g) = {}^t g \circ {}^t f.$$

2.7 Noyaux et Images

Théorème I.4: Noyau et Image de la transposé

Soit $f : E \longrightarrow F$ et ${}^t f : F^* \longrightarrow E^*$. On a :

1. $\mathrm{Ker}^t f = (\mathrm{Im} f)^{\perp}$;

2. $\mathrm{Im}^t f = (\mathrm{Ker} f)^{\perp}$.

Preuve

Soit $\varphi \in F^*$. On a $\varphi \in \mathrm{Ker}^t f$ si et seulement si $\varphi \circ f = 0$ si et seulement si $\varphi \circ f(v) = 0$ pour tout $v \in E$ si et seulement si $\varphi(v) = 0$ pour tout $v \in \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $\varphi \in (\mathrm{Im} f)^{\perp}$.

Soit $\varphi \in F^*$ et donc ${}^t f(\varphi) \in \mathrm{Im}({}^t f)$. Soit $v \in \mathrm{Ker} f$. On a

$$ {}^t f(\varphi)(v) = \varphi(f(v)) = \varphi(0) = 0. $$

Donc ${}^t f(\varphi) \in (\mathrm{Ker} f)^{\perp}$ et $\mathrm{Im}^t f \subset (\mathrm{Ker} f)^{\perp}$.
Par ailleurs, on a :

$$ \begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}^t f) &= \dim(F^*) - \dim(\mathrm{Ker}^t f) = \dim(F^*) - \dim((\mathrm{Im} f)^{\perp}) \\ &= \dim(F^*) - \dim(F) + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker} f) \\ &= \dim((\mathrm{Ker} f)^{\perp}). \end{aligned} $$

Avec l'inclusion déjà montrée cela permet de conclure que $\mathrm{Im}^t f = (\mathrm{Ker} f)^{\perp}$.

3 Réduction des endomorphismes

3.1 Polynôme minimal

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. L'ensemble I des polynômes $P \in K[X]$ tels que $P(A) = 0$ est un idéal. Comme $K[X]$ est euclidien, cet idéal est engendré par un unique polynôme unitaire μ_A, appelé polynôme minimal de A. On obtient un isomorphisme

$$ K[X]/(\mu_A) \simeq K[A] \subset \mathcal{M}_n(K). $$

Comme $\dim_K(\mathcal{M}_n(K)) \leqslant n^2$, le degré de μ_A est au plus n^2. Le théorème suivant donne mieux :

Théorème I.5. Cayley-Hamilton

Soit $\chi_A = \det(A - XI_n)$ le polynôme caractéristique de A. On a

$$ \chi_A(A) = 0. $$

Donc μ_A divise χ_A.

Preuve

Hamilton-Cayley est vrai pour la matrice générique : c'est la matrice carrée $G = (T_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ que l'on considère comme matrice à coefficients dans l'anneau de polynômes $R = \mathbb{Z}[Ti,j]$ que l'on peut plonger dans son corps de fractions $\mathbb{Q}(Ti,j)$. Si $M \in \mathcal{M}_n(K)$, il existe un unique morphisme $\theta : R \longrightarrow K$ qui envoie G sur M (on spécialise G en M par θ). Le morphisme θ envoie toute identité algébrique vérifiée par les coefficients de G sur l'identité correspondante pour M. En particulier, il

suffit de vérifier Hamilton-Cayley pour G pour l'obtenir pour n'importe quelle matrice à coefficients dans K (et même dans un anneau commutatif).
Or G vérifie Hamilton-Cayley parce qu'elle est diagonalisable sur le corps de décomposition de son polynôme caractéristique. Il suffit de vérifier que les valeurs propres de G sont distinctes, c'est-à-dire que le discriminant $\Delta \in R$ de son polynôme caractéristique est non nul. Pour le montrer on peut spécialiser G en une matrice diagonale M à éléments diagonaux distincts sur $\mathbb{C}$, par exemple. Alors Δ s'envoie sur le discriminant du polynôme caractéristique de M qui est non nul.

3.2 Lemme des noyaux

Théorème I.6

Soit E un K-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Soit $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors

$$\mathrm{Ker}(P_1 \ldots P_k)(u) = \mathrm{Ker}P_1(u) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}P_k(u).$$

Si, de plus, $(P_1 \ldots P_k)(u) = 0$ alors, pour tout j, les projections π_j sur $\mathrm{Ker}P_j(u)$ paralellement à la somme des autres $\mathrm{Ker}P_i(u)$ est un polynôme en u.

Preuve

Posons $P = P_1 \ldots P_k$ et $Q_j = P/P_j$. L'hypothèse implique que les Q_j sont globalement premiers entre eux. Le théorème de Bezout donne l'existence de polynômes V_i tels que $\sum V_i Q_i = 1$.
Soit $x \in E$. En évaluant cette relation en u, puis en x on obtient

$$\sum V_i(u) \circ Q_i(u)(x) = x. \tag{3.1}$$

Si de plus, $x \in KerP(u)$ alors $V_i(u) \circ Q_i(u)(x) \in \mathrm{Ker}P_i(u)(x)$. Donc $KerP(u)$ est bien la somme des $\mathrm{Ker}P_i(u)(x)$.
Pour j fixé, soit

$$x \in \mathrm{Ker}P_j(u) \cap (\sum_{i \neq j} \mathrm{Ker}P_i(u)).$$

Pour montrer que la somme est directe, nous devons montrer que $x = 0$.
Pour tout $i \neq j$, comme P_j divise Q_i et $x \in \mathrm{Ker}P_j(u)$, on a $Q_i(u)(x) = 0$. De même, $x \in \sum_{i \neq j} \mathrm{Ker}P_i(u)$ implique que $Q_j(u)(x) = 0$. Mais alors, la relation (3.1) montre que $x = 0$.

Reste à montrer que les π_j sont des polynômes en u avec l'hypothèse supplementaire. On va montrer que $\pi_i = (V_i Q_i)(u)$. On a déjà vu que $(V_i Q_i)(u)(x) \in \mathrm{Ker}P_i(u)$ pour tout x. Mais alors (3.1) et l'unicité de la décomposition en somme directe suffisent à conclure.

Précision sur CH :

Théorème I.7

Les polynômes μ_u et χ_u ont les mêmes facteurs irréductibles.

Preuve

Ecrivons $\chi_u = P_1^{\alpha_1} \dots P_s^{\alpha_s}$ sa décomposition en produit d'irréductibles. Le TDN et CH donnent

$$E = \mathrm{Ker} P_1^{\alpha_1}(u) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker} P_s^{\alpha_s}(u).$$

On pose $E_i = \mathrm{Ker} P_i^{\alpha_i}(u)$ et u_i la restriction de u à E_i.

Par Cayley-Hamilton, on a $\mu_u = P_1^{\beta_1} \dots P_s^{\beta_s}$ avec $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$. Il s'agit de montrer que $\beta_i \neq 0$. Encore le TDN donne
$$E = \mathrm{Ker} P_1^{\beta_1}(u) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker} P_s^{\beta_s}(u).$$
Or $\mathrm{Ker} P_1^{\beta_i}(u) \subset \mathrm{Ker} P_1^{\alpha_i}(u)$, pour tout i. En comparant les deux décompositions il vient $\mathrm{Ker} P_1^{\beta_i}(u) = \mathrm{Ker} P_1^{\alpha_i}(u)$.
Par Cayley-Hamilton μ_{u_i} divisie χ_{u_i} ; donc $\chi_{u_i} =$

3.3 Vecteur totalisateur

Si $x \in E$, on note I_x l'idéal de $k[X]$ constitué des polynômes P tels que $P(u)(x) = 0$. On note $\mu_{u,x}$ le générateur unitaire de cet idéal. On voit facilement que $\mu_{u,x}$ divise μ_u. On a de plus le :

Lemme I.8

lem :tot Il existe x dans E tel que $\mu_{u,x}$=μ_u.

Preuve

n écrit $\mu_u = P_1^{\alpha_1} \cdots P_s^{\alpha_s}$, avec P_i des polynômes irréductibles 2 à 2 distincts et α_i des entiers strictement positifs. D'après le **théorème de décomposition des noyaux**, on a :

$$E = \mathrm{Ker}(\mu_u(u)) = \mathrm{Ker}(P_1^{\alpha_1}(u)) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(P_s^{\alpha_s}(u)).$$

On vérifie que pour tout i, $\mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$ est stable par u et $\mu_{u_{|\mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))}} = P_i^{\alpha_i}$. En effet, sinon μ_u serait plus petit ! Soit $x_i \in \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)) - \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i - 1}(u))$. Posons $x = x_1 + \cdots + x_s$.
On vérifie alors, que $P(u)(x) = 0$ si et seulement si pour tout i, $P(u)(x_i) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si pour tout i, $P_i^{\alpha_i} = \mu_{u_{|\mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))}}$ divise P ; si et seulement si μ_u divise P. On en déduit que μ_u divise $\mu_{u,x}$. CQFD.

4 Théorème de Jordan

4.1

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie. Le théorème de Jordan est le suivant :

Théorème I.9. Jordan

oit u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est **scindé**.
Alors, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs carrés du type

$$J_{\lambda,l} = \left.\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}\right\} l,$$

où $\lambda \in k$.

De plus, l'ensemble (avec multiplicités) des couples (λ, l) tels que $J_{\lambda,l}$ apparaît ainsi ne dépend que de u et pas de la base.

Une matrice diagonale par blocs du type $J_{\lambda,l}$ est appelé *matrice de Jordan*.

4.2 Existence

Nous donnons ici les grandes lignes de la démonstration de l'existence :
Étape 1 : Réduction au cas nilpotent
Grâce au **théorème de décomposition des noyaux** et à celui de **Cayley-Hamilton** on montre que E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques de u. Cette décomposition est stable par u, il suffit donc de montrer l'existence dans le cas où u a un seul sous-espace caractéristique c'est-à-dire $u = \lambda Id + n$, avec n nilpotente. Il suffit alors, de traiter le cas où u est nilpotente.

Étape 2 : Le cas nilpotent
La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de E.
Supposons que $u^s = 0$ et $u^{s-1} \neq 0$. Soit x dans E tel que $u^{s-1}(x) \neq 0$. Alors, la famille $\mathcal{F} = (u^{s-1}(x), \cdots, u(x), x)$ est libre, et le sous-espace F engendré par $\mathcal{F}$ est stable par u. De plus, la matrice de la restriction de u à F dans la base $\mathcal{F}$ est $J_{0,s}$.

Pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence, il suffit maintenant de trouver un supplémentaire à F stable par u.
Comme $u^{s-1} \neq 0$, il existe $\varphi \in E^*$ tel que

$$\varphi(u^{s-1}(x)) \neq 0. \tag{4.1}$$

Soit G' le sous-espace de E^* engendré par les ${}^t u^i(\varphi)$. D'après (4.1), ${}^t u^{s-1}(\varphi) \neq 0$. De plus, $({}^t u)^s = {}^t(u^s) = 0$. On en déduit $({}^t u^{s-1}(\varphi), \cdots, \varphi)$ est une base de G' et que G' est stable par ${}^t u$.
Mais alors, l'orthogonal de G' est stable par u et a la dimension d'un supplémentaire de F. Il nous reste donc à montrer que cet orthogonal est en somme directe avec F.
Soit $y = \sum_{i=0}^{s-1} a_i u^i(x) \in F$. Supposons que y est dans l'orthogonal de G' et montrons que y est nul. Si ce n'est pas le cas notons i l'indice minimal tel que $a_i \neq 0$. On a : $0 = {}^t u^{s-1-i}(\varphi)(y) = a_i \varphi(u^{s-1}(x))$. Mais alors, la condition (4.1) montre que $a_i = 0$. Contradiction.

4.3 Unicité

La démonstration de l'unicité que nous esquissons ci-dessous est aussi un moyen de calculer une matrice de Jordan à laquelle est semblable une matrice donnée.

Supposons que u a une matrice de Jordan M dans une certaine base de E. On va expliquer que l'on peut décrire les blocs de M en ne parlant que de u : cela montrera bien l'unicité !
On remarque tout d'abord que l'ensemble des λ qui apparaissent est le spectre de u. Fixons λ dans le spectre de u et considérons la suite : $d_0 = 0$, $d_i = \dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})^i)$. On vérifie que si u est un $J_{\lambda,l}$ (dans une base) cette suite augmente de 1 en 1 jusqu'à atteindre la valeur l puis stationne. On en déduit alors que $d_i - d_{i-1}$ est le nombre de blocs $J_{\lambda,l}$ de M vérifiant $l \geqslant i$. Posons $\delta_i = d_i - d_{i-1}$. Notons $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_r$, la suite ordonnée des tailles des blocs $J_{\lambda,l}$ de M. On remarque alors que l_i est le nombre de δ_j supérieurs à i. Nous avons bien exprimé les l tels que $J_{\lambda,l}$ apparaît dans M en fonction des $\dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})^i)$.

4.4 Calcul de la matrice de Jordan d'un endomorphisme

Une question naturelle est maintenant : Étant donnée une matrice A explicite, comment calculer une matrice de Jordan J à laquelle elle est semblable et comment calculer une matrice de passage P ?

Ces deux questions qui se ressemblent sont en fait très différentes. Pour le comprendre, on peut regarder le cas d'une matrice A diagonalisable à valeurs propres distinctes. Dès que l'on a scindé le polynôme caractéristique de A, on sait à quelle matrice diagonale A est semblable. Trouver une matrice de passage revient à trouver une base constituée de vecteurs propres et revient donc à résoudre autant de systèmes linéaires qu'il y a de valeurs propres.

Dans les deux cas, il faut commencer par calculer puis scinder le polynôme caractéristique de A. Pour chaque valeur propre λ, on calcule alors la suite des sous-espaces $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^i$.

Pour répondre à la première question, on a presque terminé puisque l'on peut alors facilement calculer les δ_i de la section précédente, puis les l_i associés. Autrement dit, on refait de manière explicite la démonstration de l'unicité pour calculer J.

En revanche, pour trouver une matrice de passage, on refait explicitement la démonstration de l'existence.

Exemple 2. Calculer la réduite de Jordan et une base de Jordan pour

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$A^3 = 0$ et que le rang de A vaut 3. Donc, la suite des dimensions des noyaux des puissances de A vaut $0 < 2 < 4 < 5$. Les différences de telles dimensions successives valent $2 \geqslant 2 \geqslant 1$. On en déduit que A est semblable à la matrice :

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cherchons maintenant une base dans laquelle l'endomorphisme associé à A a B pour matrice. On commence par choisir un vecteur qui n'est pas dans le noyau de A^2. **On prend un vecteur de la base canonique pour simplifier les calculs !** Posons

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_2 = A(V_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad V_3 = A^2(V_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche maintenant un sous-espace stable par A et supplémentaire à $\mathrm{Vect}(V_1, V_2, V_3)$. Soit $\varphi = e_1^*$ une forme linéaire simple (base canonique) telle que $\varphi(V_3) \neq 0$. On calcule les itérés de φ par ${}^tA$:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad {}^tA(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad {}^t(A^2)(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit G' le sous-espace engendré par ces trois formes linéaires. On cherche maintenant V_4 orthogonal à ces trois formes linéaires tel que $A^1(V_4) \neq 0$ (car on cherche maintenant un bloc de Jordan 2×2). L'orthogonal de G' est

$$\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \\ y - x \\ x \end{pmatrix} \ : \text{ tels que } x,\, y \in \mathbb{R} \}.$$

Autrement dit,

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de l'orthogonal de G'. On vérifie qu'en prenant pour V_4 le premier vecteur de la base ci-dessus, on a bien $A(V_4) \neq 0$. On calcule :

$$A(V_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: V_5.$$

La matrice de A dans la base $(V_3, V_2, V_1, V_5, V_4)$ est B. Autrement dit, la matrice

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est une matrice de passage de A à B, c'est-à-dire $P^{-1}AP = B$.

Exercice 1. *Calculer la réduite de Jordan puis une base de Jordan des matrices :*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N := \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 & 1 \\ 8 & 5 & -2 & 3 \\ 11 & 0 & -4 & 1 \\ -22 & -11 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Afin de limiter vos calculs, on vous indique que $N^2 = 0$.

4.5 Applications

Les propriétés suivantes se montrent grâce au théorème de Jordan et sont difficiles sans celui-ci :

1. Toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est semblable à sa transposée. Le résultat est vrai sur $\mathbb{R}$ car deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.
2. Toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice symétrique. Sur $\mathbb{R}$, les matrices semblables à des matrices symétriques sont les matrices diagonalisables.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Posons $\mathrm{Com}(A) := \{B \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ AB = BA\}$. Posons $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) := \{C \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ BC = CB \ \ \forall B \in \mathrm{Com}(A)\}$. Alors, $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A))$ est l'ensemble des polynômes en A.

Il va de soit que cette liste n'est pas exhaustive et ne demande qu'à être complétée.
Lemme des noyaux, Dunford (2 preuves : Chinois et Newton), endomorphismes cycliques (caractérisations équivalentes), Jordan (preuve aspet algorithmique).

Chapitre 2

Algèbre Bilinéaire

Sommaire

1 Formes bilinéaires et quadratiques et leurs matrices

2 Réduction de Gauss

Cas réel, complexe et corps finis détaillés.
Seule preuve faite ici : corps finis.

3 Espaces Euclidiens

inégalité CS et projection orthogonale (sur un sev). Def du groupe orthogonal.
Pas de preuve là.

4 Espaces Hermitiens

def de norme hermitienne comme norme euclidienne i-invariante + réduction des endomorphismes normaux avec preuve.

Chapitre 3

Matrices à coefficients dans un anneau euclidien

Sommaire

1 Rappels sur les anneaux euclidiens

Def et exemples
Gauss, Bezout, ppcm, pgcd, Euclide, factoriel.
Pas de preuve.

2 Théorème de Smith

Existence et Unicité.

3 Systèmes diophantiens

4 Groupes abéliens de type fini

5 Réduction de Frobenius

Chapitre 4

Topologie en algèbre linéaire

Sommaire

1 Densité

Discriminant.
Densité de diagonalisable, cyclique.
Preuve de chiAB=chiBA et Cayley-Hamilton sur les complexes. Présentation de l'argument pour passer à tout corps via $\mathbb{Z}$.

2 Orbites

fermées, contenant 0 dans l'adhérence.

3 Exponentielle matricielle

Dunford, algorithme de calcul de A^n et $exp(tA)$.

4 Décomposition polaire