

## Feuille 0 : Groupes

**Exercice 1** (Lemme Chinois sur  $\mathbb{Z}$ ).

1. Soit  $n_1$  et  $n_2$  deux entiers non nuls et premiers entre eux. Rappeler pourquoi il existe deux entiers  $u$  et  $v$  tels que  $un_1 + vn_2 = 1$ .
2. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver  $u$  et  $v$  pour  $n_1 = 27$  et  $n_2 = 22$ .  
*On pourra se contenter de remonter l'algorithme d'Euclide plutôt que de formaliser sa version étendue.*
3. Soit  $n_1, \dots, n_s$  des entiers naturels non nuls et deux à deux premiers entre eux et  $n$  leur produit. Montrer que « l'application diagonale »  $\delta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}$  induit un isomorphisme entre  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}$ .  
*Penser à utiliser le cardinal.*
4. Traduire l'énoncé précédent en terme de système de congruence.
5. Ici  $s = 2$ . Soit  $a_1$  et  $a_2$  dans  $\mathbb{Z}$ . Décrire en fonction de  $u$  et  $v$ , l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{Z} : x \equiv a_1 [n_1] \text{ et } x \equiv a_2 [n_2]\}.$$

6. En déduire un algorithme pour résoudre un système du type

$$\forall i = 1, \dots, s \quad x \equiv a_i [n_i].$$

**Exercice 2.** Soit  $G$  un groupe agissant sur un ensemble  $X$  et  $K$  un corps. Montrer que  $G$  agit naturellement sur l'ensemble des parties de  $X$  et sur l'espace vectoriel  $K^X$  des fonctions de  $X$  dans  $K$ .

**Exercice 3. Théorème de Cauchy**

Soit  $G$  un groupe fini et  $p$  un diviseur premier de  $\#G$ . On considère l'ensemble

$$E = \{(x_1, \dots, x_p) \in G^p : x_1 \dots x_p = e\}.$$

1. Dénombrer  $E$ .
2. Montrer qu'il existe une action non triviale de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  sur  $E$ .
3. Montrer qu'il existe un élément d'ordre  $p$  dans  $G$ .

**Exercice 4. Théorèmes de Sylow.**

Soit  $G$  un groupe fini et  $p$  un diviseur premier de  $\#G$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{N}$  tel que  $p^\alpha$  divise  $\#G$  et  $p^{\alpha+1}$  ne divise pas  $\#G$ . Un  $p$ -Sylow de  $G$  est un sous-groupe de cardinal  $p^\alpha$ .

1. Montrer que  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$  admet un  $p$ -Sylow.
2. Soit  $S$  un  $p$ -Sylow de  $G$  et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Montrer qu'il existe  $g \in G$  tel que  $gSg^{-1} \cap H$  est un  $p$ -Sylow de  $H$ . *Indication : utiliser l'action de  $H$  sur  $G/S$ .*
3. En déduire que  $G$  admet un  $p$ -Sylow.
4. Soit  $S$  un  $p$ -Sylow de  $G$  et  $H$  un  $p$ -sous-groupe. Montrer qu'il existe  $g \in G$  tel que  $H \subset gSg^{-1}$ .
5. Montrer que deux  $p$ -Sylow de  $G$  sont conjugués. Montrer que le nombre  $n_p$  de  $p$ -Sylow vérifie

$$n_p \equiv 1 [p] \quad n_p \mid \frac{\#G}{p^\alpha}$$

6. Montrer qu'un groupe de cardinal 200 n'est pas simple.
7. Soit  $p$  un nombre premier. Déterminer le nombre de  $p$ -Sylow du groupe symétrique  $S_p$ .

**Exercice 5.** Décrire un système complet de représentants de l'action de  $\text{GL}_p(K) \times \text{GL}_q(K)$  sur  $\mathcal{M}_{pq}(K)$  définie par

$$(g, h) \cdot M := gMh^{-1}.$$

**Exercice 6 (Stabilisateurs).** Soit  $K$  un corps et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $B$  (resp.  $T$ ) l'ensemble des matrices de  $\text{GL}_n(K)$  qui sont triangulaires supérieures (resp. diagonales).

1. Montrer que  $T$  et  $B$  sont des sous-groupes de  $G = \text{GL}_n(K)$ .
2. Exhiber des actions pour lesquelles  $T$  et  $B$  sont des stabilisateurs.
3. En déduire des descriptions de  $G/B$  et  $G/T$ .

**Exercice 7 (Groupes Linéaires).**

Soit  $\mathbb{F}_q$  un corps de cardinal  $q$ .

1. Déterminer le cardinal de  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ .
2. Déterminer le cardinal de  $\text{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ .
3. En déduire que  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_2)$  est isomorphe à  $S_3$  et que  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$  est isomorphe à  $S_4$ .
4. Montrer que  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$  est isomorphe au groupe alterné  $A_5$ .

**Exercice 8 (Matrices échelonnées).**

Soit  $K$  un corps et  $p, q \in \mathbb{N}^*$ . On étudie ici l'action de  $\text{GL}_p(K)$  sur  $\mathcal{M}_{pq}(K)$  par multiplication à gauche. On définit trois relations d'équivalence sur  $\mathcal{M}_{pq}(K)$  :

- i Deux matrices sont dites GL-équivalentes si et seulement si elles appartenaient à la même orbite.
- ii Deux matrices  $A$  et  $B$  sont dites Ker-équivalentes si et seulement si  $\text{Ker}A = \text{Ker}B$ .
- iii Deux matrices sont dites op-équivalentes si et seulement s'il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes transformant l'une en l'autre. Ici les opérations élémentaires utilisées sont les échanges, multiplications par des scalaires non nuls, ajouts d'un multiple d'une ligne à une autre.

Soit  $M \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ . Pour  $1 \leq i \leq p$ , on note  $\lambda_i$  la colonne contenant le premier élément non nul de la ligne  $i$ . Si la ligne est nulle on pose  $\lambda_i = \infty$ . On dit que  $M$  est *échelonnée* si les lignes nulles de  $M$  sont en bas et  $\lambda_1 < \dots < \lambda_s$ , où  $s$  est le nombre de ligne non nulles. On dit que  $M$  est *échelonnée réduite* si pour tout  $i \leq s$ , le premier élément non nul de la ligne  $i$  vaut 1 et si c'est le seul élément non nul de sa colonne.

1. Montrer que deux matrices de  $\mathcal{M}_{pq}(K)$  sont GL-équivalentes si et seulement si elles sont Ker-équivalentes.
2. Montrer que si deux matrices de  $\mathcal{M}_{pq}(K)$  sont op-équivalentes alors elles sont Ker-équivalentes.
3. Montrer que toute matrice de  $\mathcal{M}_{pq}(K)$  est op-équivalente à une matrice échelonnée.
4. Montrer que toute matrice de  $\mathcal{M}_{pq}(K)$  est op-équivalente à une matrice échelonnée réduite.
5. En déduire que le groupe  $\text{GL}_p(K)$  est engendré par les matrices de transvection, dilation et permutation.
6. En déduire la réciproque de la question 2.

Fixons  $\lambda = (\lambda_1 < \dots < \lambda_s)$  avec  $s \leq p$ . Soit  $\mathcal{ER}(\lambda)$  l'ensemble des matrices échelonnées réduites de « forme »  $\lambda$ .

Notons  $(e_1, \dots, e_q)$  la base canonique de  $K^q$ . On note  $S$  le sous-espace vectoriel de  $K^q$  engendré par les vecteurs  $e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_s}$ . Soit  $V_0$  le sous-espace vectoriel de  $K^q$  engendré par les autres vecteurs de la base canonique.

7. Soit  $M$  dans  $\mathcal{ER}(\lambda)$ . Soit  $\tilde{M}$  la matrice obtenue en supprimant les colonnes  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ .  
Montrer que le graphe de  $\tilde{M}$  est le noyau de  $M$ .
8. Soit  $M$  dans  $\mathcal{ER}(\lambda)$ . Exprimer  $\dim(\text{Ker}M \cap \text{Vect}(e_1, \dots, e_j))$  en fonction de  $\lambda$ .
9. En déduire que toute matrice de  $\mathcal{M}_{pq}(K)$  est op-équivalente à une unique matrice échelonnée réduite.
10. Montrer que  $\mathcal{ER}(\lambda)$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{M}_{pq}(K)$  de dimension  $\sum_{i=1}^s q + 1 - i - \lambda_i$ .