Feuille 1 : Réduction des endomorphismes

Exercice 1. Pour $n \geq 1$, on considère les endomorphismes de $\mathbb{C}_n[X]$ donnés par $P \mapsto P'$ et $P \mapsto P(X+1) - P(X)$. Quelle est leur forme réduite de Jordan ?

Exercice 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que le vecteur $(1,1,1)$ est un vecteur propre.
2. Sachant que $\det(A) = 27$ déterminer le polynôme caractéristique de A puis le polynôme minimal de A (avec le moins de calcul possible).
3. Calculer A^n pour tout entier n.
4. Soit $P = (X-1)^2(X-2)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(M) = 0$. Exprimer M^n en fonction de M et M^2.

Exercice 3. Matrices nilpotentes

1. Parmi les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

   y en a-t-il deux semblables ?
2. Pour J un bloc de Jordan nilpotent, quels sont les blocs de Jordan de J^2 ? Donner une caractérisation des matrices nilpotentes qui ont une racine carrée.
3. Combien de classes de similitude de matrices 6×6 nilpotentes ?

Exercice 4. Endomorphismes cycliques

Soit u un endormorphisme du K-espace vectoriel E de dimension n. Montrer l'équivalence entre :

1. il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base ;
2. $\deg(\mu_u) = n$;
3. $\mu_u = \pm\chi_u$;
4. $\mathrm{Com}(u) = K[u]$;
5. $\dim(\mathrm{Com}(u)) = n$.

On dit alors que u est cyclique.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\mathrm{ad}_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad M \longmapsto AM - MA.$$

1. Montrer que si A est diagonalisable, l'endomorphisme ad_A l'est aussi.
2. Montrer que si A est nilpotente, l'endomorphisme ad_A l'est aussi.

Exercice 6. Transposée

1. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à sa transposée.
2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables en tant qu'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à sa transposée.

Exercice 7. Bicommutant

Soit $E \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\mathrm{Com}(E) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,:\, AB = BA \qquad \forall A \in E\},$$

pour $E = \{A\}$ on notera $\mathrm{Com}(A)$. Montrer à l'aide du théorème de Jordan que

$$\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = \{P(A) \,:\, P \in \mathbb{C}[X]\}.$$

L'énoncé analogue est-il vrai sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 8. Réduction de Jordan sur les réels Pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$J_k(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}).$$

Pour $z = a + ib \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$), on pose

$$\Lambda(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

et

$$K_k(z) = \begin{pmatrix} \Lambda(z) & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & I_2 \\ 0 & \cdots & 0 & \Lambda(z) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2k}(\mathbb{R}).$$

Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme $J_k(x)$ et $K_k(z)$.

Exercice 9. Soit

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. En déduire à quelle matrice de Jordan J, la matrice A est-elle semblable ?
3. Trouver une matrice inversible P telle que

$$A = PJP^{-1}.$$