Feuille 2 : Algèbre bilinéaire, Espaces Euclidiens, Espaces Hermitiens

Exercice 1.

1. Soit q la forme quadratique définie par $q(x) = x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Ecrire q dans la base $(f_1 = (1, 0),\ f_2 = (2, 1))$.
2. Trouver la forme bilinéaire associée à la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Simplifier l'expression $q(x + y) + q(y + z) + q(x + z) - q(x + y + z)$, où q est une forme quadratique quelconque.
4. Déterminer les signatures des formes suivantes :
   (a) $q_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ sur $\mathbb{R}^3$;
   (b) $q_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$ sur $\mathbb{R}^3$;
   (c) $q_3(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2$ sur $\mathbb{R}^3$;
   (d) $q_4(x) = \sum_{i<j} x_ix_j$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique non dégénérée sur E. Montrer que tout vecteur isotrope est inclus dans un plan U tel que la restriction de q à U a signature $(1, 1)$. Un tel plan est dit *hyperbolique*.

Exercice 3. Trouver sans calcul la signature de la forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ suivante :

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

On note S_n le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques, S_n^+ l'ensemble des matrices positives, S_n^{++} l'ensemble des matrices définies positives.

Exercice 4. Soit $A \in S_n$. Montrer que A est positive (resp. définie positive) si et seulement si ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Si A et B sont dans S_n, on écrit $A \leq B$ lorsque la matrice $B - A$ est positive.

Exercice 5.

1. Montrer que la fonction $M \mapsto \log \det M$ est une fonction concave de S_n^{++} dans $\mathbb{R}$
2. Soient $A,\ B \in S_n^+$ telles que $A \leq B$. Montrer que $\det A \leq \det B$.
3. Soit A, B dans S_n^{++} telles que $A \leq B$. Montrer que $B^{-1} \leq A^{-1}$.
4. Soit A, B dans S_n^+ telles que $A \leq B$. Montrer que $\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$ (si $M \in S_n^+$, on note $\sqrt{M}$ l'unique matrice positive telle que $\sqrt{M}^2 = M$).

Exercice 6. Soient E un espace euclidien de dimension n, A un endomorphisme symétrique de E et q la forme quadratique associée. On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A.

Soien H un hyperplan de E et $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_{n-1}$ les valeurs propres de la restriction de q à H. Montrer que pour $k \leq n - 1$, on a :

$$\lambda_k \leq \mu_k \leq \lambda_{k+1}.$$

Exercice 7. Théorème de Sylvester
Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et p un entier entre 1 et n. On définit A_p comme étant la matrice extraite de A contenant les p premières lignes et p premières colonnes de A.

1. Montrer que si A est positive, alors $\det(A_p) \geq 0$ pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que A est définie positive si et seulement si $\det(A_p) > 0$ pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$.
4. Pour $I \subset \{1, \ldots, n\}$, on note A_I la matrice extraite de A contenant les lignes et colonnes d'indices dans I. Montrer que A est positive si et seulement si $\det(A_I) \geq 0$ pour tout sous-ensemble non vide I de $\{1, \ldots, n\}$.

Exercice 8. Inégalité de Hadamard. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \cdots, C_n$ les vecteurs colonnes de A. Montrer que

$$|\det(A)| \leq \|C_1\| \cdot \cdots \cdot \|C_n\|.$$

Exercice 9. Endomorphismes préservant l'orthogonalité
Soit E un espace euclidien. Déterminer les endomorphismes u de E qui préservent l'orthogonalité, c'est-à-dire tels que pout tous x, y dans E on ait

$$\langle x, y \rangle = 0 \Longrightarrow \langle u(x), u(y) \rangle = 0.$$

Exercice 10. Projecteurs
Soit p un projecteur d'un espace euclidien. Montrer l'équivalence entre

1. le projecteur p est orthogonal (i.e. son image est orthogonale à son noyau),
2. l'endomorphisme p est symétrique,
3. pour tout x dans E, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 11. Décomposition en valeurs singulières
Considérons $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ muni de l'action du groupe $U_m(\mathbb{C}) \times U_n(\mathbb{C})$ donnée par la formule :

$$(U, V).M = UMV^{-1}.$$

On veut montrer le résultat suivant :

Un système complet de représentants pour cette action est l'ensemble $\Sigma_{m,n}$ des matrices dont tous les coefficients non nuls sont sur la diagonale et ceux-ci sont réels ordonnées par ordre décroissant.

Dans la suite, pour toute matrice A, on pose $A^* = {}^t\bar{A}$. Soit $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

1. Décrire le système complet de représentants lorsque $m > n$, $m = n$ et $m < n$.
2. Supposons que $M = U\Sigma V^{-1}$ pour $\Sigma \in \Sigma_{m,n}$. Relier les coefficients diagonaux de Σ aux valeurs propres de M^*M ; en déduire que toute orbite contient au plus un élément de $\Sigma_{m,n}$.
3. Justifier que la matrice M^*M peut s'écrire comme
$$M^*M = V\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)V^*.$$
avec $V \in U_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$. Déterminer la seule matrice $\Sigma \in \Sigma_{m,n}$ à laquelle M peut être équivalente.
4. Notons $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$ les colonnes de V. Montrer que pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans $\mathbb{C}$ on a
$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\alpha_i|^2.$$
5. Soit r le nombre de λ_i non nuls. A partir des vecteurs $(\lambda_1^{-1/2} M v_1, \ldots, \lambda_r^{-1/2} M v_r)$, construire une matrice $U \in U_m(\mathbb{C})$ telle que $M = U\Sigma V^{-1}$.
6. En mimant la démonstration ci-dessus, écrire sous la forme $U\Sigma V^*$ les matrices suivantes :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$