Feuille 3 : Matrices à coefficients dans un anneau

Exercice 1. Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/90\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Exercice 2. Montrer qu'un groupe abélien fini non cyclique possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain nombre premier p.

Exercice 3.
1. Combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 360 ? Faire la liste complète de ces groupes.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, on note $p(\alpha)$ le nombre de façons d'écrire α comme somme d'une suite finie décroissante d'entiers naturels non nuls. Plus généralement, pour tout entier n, combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal n ?
   La réponse fera intervenir des quantités $p(\alpha)$. Il n'existe pas de formule pour ce nombre $p(\alpha)$.

Exercice 4. Déterminer des entiers $1 < p \leq q$ tels que $(\mathbb{Z}/187\mathbb{Z})^\times$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Un tel couple (p, q) est-il unique ?

Exercice 5. Déterminer la forme normale de Smith S de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; déterminer aussi des matrices inversibles P, Q telles que $PAQ = S$. Résoudre ensuite dans $\mathbb{Z}^3$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$$

Exercice 6. Déterminer les invariants de similitudes des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 9 & -2 \\ 3 & 12 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Combien y a-t-il de classes de similitude d'endomorphismes de $\mathbb{C}^6$ dont le polynôme caractéristique est $(X^2 - 2)^2(X^2 + 2)$? Même question en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ puis par $\mathbb{Q}$.

Exercice 8. Considérons l'action de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 12 donnée par $(P, Q).M = PMQ^{-1}$. Combien y a-t-il de classes d'équivalence ?

Exercice 9.
1. Soit P un polynôme unitaire de degré n. Montrer que l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ telles que $\chi_M = \pm P$ contient un nombre fini de classes de similitude.
2. Même question sur un corps quelconque.
3. Trouver deux matrices A et B non semblables qui ont mêmes polynômes caractéristiques et minimaux. Quelle est la taille minimale de telles matrices ?

Exercice 10.
1. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si son polynôme caractéristique est à coefficients entiers.
2. Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} i & 1 & & \\ 0 & i & & \\ & & -i & 0 \\ & & 0 & -i \end{pmatrix}$$

   n'est pas semblable à une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{Z})$ mais que son polynôme caractéristique est à coefficients entiers.

Exercice 11 (Involutions de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$)**.** On fixe $n \geq 1$ et on veut étudier l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ par conjugaison sur l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ telles que $M^2 = I_n$.

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et $x \in \mathbb{Q}$ tels que $P(x) = 0$. Montrer que x est entier.
2. Montrer que si l'on remplace $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Q}$, il y a exactement $n+1$ classes de conjugaison, et trouver un représentant pour chaque classe.
3. Montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
4. Montrer que $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas conjuguées dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, mais le sont dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$.
5. Soit $v \in \mathbb{Z}^n$. Montrer que v est la première colonne d'une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si ses coefficients sont premiers entre eux dans leur ensemble.
6. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ qui est trigonalisable par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ l'est par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.
7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $M^2 = I_n$. Montrer que M est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-conjuguée à une matrice de la forme
$$M_1 = \begin{pmatrix} I_r & B \\ 0 & -I_s \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}).$$
8. Soit $N_1 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$, $N_2 \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})$ et $R \in \mathcal{M}_{rs}(\mathbb{Z})$. Calculer les conjugués de la matrice M_1 par les matrices
$$g = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I_r & R \\ 0 & I_s \end{pmatrix}.$$
9. En déduire que M_1 est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-conjuguée à une matrice M_2 de la forme même forme que M_1 avec
$$B = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
pour un certain entier naturel k.
10. En déduire que M est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ conjuguée à une matrice diagonale par bloc
$$\Delta_{abc} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, T, \ldots, T),$$
où a, b et c désignent respectivement le nombre de 1, -1 et T.
11. Montrer que si Δ_{abc} et $\Delta_{a'b'c'}$ sont $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-conjugués alors
   (a) $a + b + 2c = a' + b' + 2c'$;
   (b) $a + c = a' + c'$;
   (c) $c = c'$. *On pourra ici regarder le rang de $\Delta + I_n$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*
   (d) $(a, b, c) = (a', b', c')$.
12. Dénombrer l'ensemble des orbites de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dans $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \, : \, M^2 = I_n\}$.

Exercice 12.

1. Posons
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 & 9 \\ 1 & 5 & 1 & 9 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 9 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$
Avec un logiciel de calcul vérifier que le pgcd de 14 529, 15 197, 20 541, 38911 et 59 619 est 167. Puis vérifier que $\det(A)$ est divisible par 167.
2. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} 10^{n-j}$ et
$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$
On suppose que $b = kr$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{Z})$.
Trouver $z \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{Z})$ tel que $Az = b$.
3. Montrer que k divise $\det A$.