Feuille 4 : Topologie des groupes de matrices

Exercice 1. Parmi les groupes suivants, lesquels sont compacts ?

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), O_n(\mathbb{R}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), U_n(\mathbb{C})$$

Exercice 2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 3. Soit $\mathcal{R} \subset O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des réflexions (par rapport à un hyperplan de $\mathbb{R}^n$)

1. Montrer que $\mathcal{R}$ engendre $O_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est connexe.
3. Quelles sont les composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$?

Exercice 4. Quelles sont les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 5. Décomposition polaire, cas non inversible
Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme $A = OS$ avec O dans $O_n(\mathbb{R})$ et S dans $S_n^+(\mathbb{R})$. Cette écriture est-elle unique ?

Exercice 6. Décomposition en valeur singulières, le retour
Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme $A = U\Delta V$ pour U, V dnas $O_n(\mathbb{R})$ et Δ une matrice diagonale à coefficients diagonaux $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \delta_n \geq 0$. Montrer de plus que les nombres δ_i sont uniquement déterminés.

Exercice 7. Si p et q sont deux entiers tels que $p + q = n$, on s'intéresse à la forme quadratique

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2.$$

On note $I_{p,q}$ sa matrice dans la base canonique : elle est diagonale et formée de deux blocs diagonaux I_p et I_q. On note $O(p,q) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,:\, {}^tMI_{p,q}M = I_{p,q}\}$ le groupe orthogonal de la forme Q.

1. Montrer que la fonction $M \mapsto \exp(M)$ réalise un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$
2. Soit M un élément de $O(p,q)$. On écrit $M = OS$ la décomposition polaire de M, où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $T = {}^tMM$.
   (a) Vérifier que T appartient à $O(p,q)$.
   (b) Montrer qu'il existe une unique matrice $U \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $U^2 = T$. Montrer de plus que $U \in O(p,q)$.
   (c) En déduire que S, puis O appartiennent à $O(p,q)$.
3. On suppose que M appartient à $O(p,q) \cap O_n(\mathbb{R})$. Démontrer que M est diagonale par blocs et que ses blocs diagonaux appartiennent respectivement à $O_p(\mathbb{R})$ et $O_q(\mathbb{R})$.
4. Montrer que la fonction exponentielle réalise une bijection de
   $$\{B \in S_n(\mathbb{R})\,;\, BI_{p,q} = -I_{p,q}B\}$$
   sur $O(p,q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R})$.
5. Démontrer enfin que $O(p,q)$ est homéomorphe à $O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}$. En déduire le nombre de composantes connexes de $O(p,q)$.