Devoir maison
Théorème de représentation de Riesz

Soit (K, d) un espace métrique compact. On note $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur K, c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts.

Une forme linéaire $\ell : C(K) \to \mathbf{R}$ est dite *positive* si elle vérifie $\ell(f) \geqslant 0$ pour tout fonction $f \in C(K)$ à valeurs positives. Le but de ce devoir est de montrer le théorème de représentation de Riesz sous les deux formes suivantes.

Théorème (Théorème de représentation de Riesz, cas positif)**.** *Soit $\ell : C(K) \to \mathbf{R}$ une forme linéaire positive. Alors il existe une unique mesure finie μ sur $(K, \mathcal{B})$ telle que*

$$\ell(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu$$

pour toute fonction $f \in C(K)$.

Théorème (Théorème de représentation de Riesz, cas général)**.** *Soit $\ell : C(K) \to \mathbf{R}$ une forme linéaire continue. Alors il existe deux mesures finies μ et ν sur $(K, \mathcal{B})$ telles que*

$$\ell(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu - \int_K f \, \mathrm{d}\nu$$

pour toute fonction $f \in C(K)$.

Soit ℓ une forme linéaire positive sur $C(K)$.

1. Montrer que ℓ est continue et que $\|\ell\| = \ell(\mathbf{1}_K)$.
2. Soit (f_n) une suite croissante d'éléments de $C(K)$ qui converge simplement vers $f \in C(K)$. Montrer que la convergence est uniforme, puis que $\ell(f) = \lim_{n\to\infty} \ell(f_n)$.
3. Soit $f : K \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que f est *semi-continue inférieurement* s'il existe une suite croissante (f_n) d'éléments de $C(K)$ telle que $\lim f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in K$. On note $SCI(K)$ l'ensemble des fonctions semi-continues inférieurement de K dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.
   (a) Montrer que pour tout ouvert O de K, la fonction $\mathbf{1}_O$ est semi-continue inférieurement.
   (b) Montrer que si f et g sont semi-continues inférieurement, alors les fonctions $f + g$, $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ le sont aussi.
   (c) Soit $A \subset C(K)$ dénombrable. Montrer que la fonction $x \mapsto \sup\{f(x) \ : \ f \in A\}$ est semi-continue inférieurement.

4. On définit $\ell^* : SCI(K) \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ par la formule

$$\ell^*(f) = \sup\{\ell(g) \ : \ g \in C(K),\ g \leqslant f\}$$

   (a) Montrer que si $f \in C(K)$ alors $\ell^*(f) = \ell(f)$.
   (b) Montrer que si $f, g \in SCI(K)$ vérifient $f \leqslant g$, alors $\ell^*(f) \leqslant \ell^*(g)$.
   (c) Montrer que si (f_n) est une suite croissante d'éléments de $SCI(K)$, alors la fonction f définie par $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ est dans $SCI(K)$ et vérifie $\ell^*(f) = \lim_{n\to\infty} \ell^*(f_n)$.
   (d) Montrer que si $f, g \in SCI(K)$ alors $\ell^*(f+g) = \ell^*(f) + \ell^*(g)$. Montrer que si $(f_n) \subset SCI(K)$ est une suite de fonctions positives, alors $\sum f_n \in SCI(K)$ et $\ell^*(\sum f_n) = \sum \ell^*(f_n)$.

5. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions bornées $f : K \to \mathbf{R}$ ayant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g, h \in SCI(K)$ telles que $-h \leqslant f \leqslant g$ et $\ell^*(g+h) < \varepsilon$. Pour $f \in \mathcal{E}$, on pose

$$\tilde{\ell}(f) = \inf\{\ell^*(g) \ : \ g \in SCI(K),\ f \leqslant g\} \overset{*}{=} \sup\{-\ell^*(h) \ : \ h \in SCI(K),\ -h \leqslant f\}$$

   (a) Justifier l'égalité $\overset{*}{=}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel contenant $C(K)$. Montrer que $\tilde{\ell}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}$ qui prolonge ℓ et qui prend des valeurs positives sur les fonctions positives.
   (c) Montrer que si $f \in SCI(K)$ est bornée, alors $f \in \mathcal{E}$ et $\tilde{\ell}(f) = \ell^*(f)$.
   (d) Montrer que si $f, g \in \mathcal{E}$ alors $\max(f, g) \in \mathcal{E}$.
   (e) Soit $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{E}$ une suite croissante de fonctions positives qui converge simplement vers une fonction bornée f. On suppose que $\tilde{\ell}(f_n) < \varepsilon$ pour tout n. Montrer qu'il existe $g \in SCI(K)$ telle que $f \leqslant g$ et $\tilde{\ell}(g) < 2\varepsilon$.
   Indication : *prendre g_n et h_n dans $SCI(K)$ telles que $0 \leqslant -h_n \leqslant f_n \leqslant g_n$ et $\ell^*(g_n + h_n) < 2^{-n}\varepsilon$, puis montrer que $g = \lim_{n\to\infty} \max(g_1, \ldots, g_n)$ convient*
   (f) En déduire que si une suite $(f_n) \subset \mathcal{E}$ converge simplement vers une fonction f bornée, alors $f \in \mathcal{E}$ et $\tilde{\ell}(f) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\ell}(f_n)$.
   (g) On note

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B} \ : \ \mathbf{1}_A \in \mathcal{E}\}.$$

   Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu puis que $\mathcal{F} = \mathcal{B}$.
   (h) Pour $A \in \mathcal{B}$, on pose $\mu(A) = \tilde{\ell}(\mathbf{1}_A)$. Montrer que μ est une mesure sur $(K, \mathcal{B})$.
   (i) Montrer que pour toute fonction $f \in C(K)$, on a

$$\ell(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu.$$

6. Montrer la partie «unicité» du théorème de représentation Riesz (cas positif).

7. En déduire le cas général du théorème de représentation de Riesz.