Contrôle final du mardi 28 mai
Durée : 3 heures

Exercice 1 (6 points)
Énoncer et démontrer le théorème de prolongement de Hahn–Banach pour les formes linéaires continues sur un espace vectoriel normé (on pourra se restreindre au cas d'un espace séparable ; on énoncera et on admettra le lemme utilisé dans la preuve donnée en cours).

Exercice 2 (1 point)
Énoncer sans démonstration le théorème du graphe fermé.

Exercice 3 (3 points)
Soit X un espace de Banach et $f \in X^*$. On dit que f *atteint sa norme* s'il existe un vecteur $x \neq 0$ dans X tel que $|f(x)| = \|f\| \cdot \|x\|$.

1. (1 point) Montrer que si X est réflexif, alors tout élément de X^* atteint sa norme.
2. Soit X l'espace $C([0,1])$ et soit ϕ la forme linéaire sur X définie par
$$\phi(h) = \int_0^{1/2} h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{1/2}^1 h(x)\,\mathrm{d}x.$$
   (a) (1 point) Montrer que ϕ est une forme linéaire continue et déterminer sa norme.
   (b) (1 point) Est-ce que ϕ atteint sa norme ?

Exercice 4 (3 points)
Soit X un espace de Hilbert complexe.

1. (1 point) Soit $S \in \mathcal{L}(X,X)$ une application linéaire continue inversible, et $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Montrer que
$$\lambda \in \sigma(S^{-1}) \iff \lambda^{-1} \in \sigma(S).$$
2. (1 point) On note $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. Soit $U \in \mathcal{L}(X,X)$ une isométrie bijective. En utilisant la question précédente, montrer que $\sigma(U) \subset \mathbf{T}$.
3. (1 point) Donner un exemple d'espace de Hilbert X et d'isométrie bijective $U \in \mathcal{L}(X,X)$ telle que $\sigma(U) = \mathbf{T}$.

Exercice 5 (5 points)
Soit $\theta : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. On définit une application linéaire $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ en posant
$$(Tf)(x) = \int_0^{\theta(x)} f(t)\,dt.$$

1. (2 points) Montrer que T est bien définie, puis que T est un opérateur compact.
2. On suppose qu'on a $\theta(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0,1]$.
   (a) (1 point) Montrer que si $f \in C([0,1])$, alors $|(T^n f)(x)| \leqslant \frac{x^n}{n!}\|f\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$.
   (b) (1 point) Déterminer le spectre de T.
   (c) (1 point) Montrer que 0 est valeur propre de T si et seulement si $\theta([0,1])$ est strictement contenu dans $[0,1]$.

Exercice 6 au verso

Exercice 6 (5 points)

0. (1 point) Rappeler la définition de point extrémal. Soit x un point extrémal d'un ensemble convexe C. On suppose qu'il existe x_1, x_2, x_3, x_4 dans C tels que $x = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$. Montrer que $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x$.

On considère les espaces de Banach

$$\ell^1(\mathbf{Z}^2) = \{f : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{R} \, : \sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2} |f(m,n)| < \infty\}$$

et

$$\ell^\infty(\mathbf{Z}^2) = \{f : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{R} \, : f \text{ bornée}\}$$

munis de leurs normes usuelles. L'espace $\ell^\infty(\mathbf{Z}^2)$ s'identifie au dual de l'espace $\ell^1(\mathbf{Z}^2)$. Une fonction $f : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{R}$ est dite *harmonique* si elle vérifie la condition

$$f(m,n) = \frac{1}{4}\left(f(m-1,n) + f(m+1,n) + f(m,n-1) + f(m,n+1)\right)$$

pour tous $(m,n) \in \mathbf{Z}^2$.

1. (2 points) Soit K l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{R}$ qui sont harmoniques et à valeurs dans $[-1,1]$. Montrer que K est une partie convexe de $\ell^\infty(\mathbf{Z}^2)$ qui est compacte pour la topologie préfaible.
2. (1 point) A l'aide de la question 0, montrer que l'ensemble K possède uniquement deux points extrémaux que l'on précisera.
3. (1 point) Montrer que toute fonction harmonique bornée sur $\mathbf{Z}^2$ est constante.