Contrôle final du lundi 19 mai
Durée : 3 heures

Exercice 1

Soient X, Y des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

1. Donner la défintion de l'adjoint T^* de T.
2. Montrer que si T est compact, alors T^* est compact.

Exercice 2

On note c_0 l'espace de Banach formé des suites réelles tendant vers 0, muni de la norme donnée par

$$\|(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\| = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n|$$

1. Soit K la boule unité fermée de c_0. Montrer que K ne possède aucun point extrémal.
2. En déduire qu'il existe pas d'espace de Banach X tel que X^* et c_0 sont isométriques (c'est-à-dire qu'il existe une bijection linéaire isométrique entre X^* et c_0).

Exercice 3

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach complexe.

1. Pour $(x_1, x_2) \in X^2$, on pose
$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_X + \|x_2\|_X.$$
Montrer que $(X^2, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.
2. Soient T_1 et T_2 dans $\mathcal{L}(X)$. Montrer que la formule
$$S : (x_1, x_2) \mapsto (T_1(x_1), T_2(x_2))$$
définit un opérateur sur X^2.
3. Déterminer $\|S\|$ en fonction de $\|T_1\|$ et $\|T_2\|$.
4. Déterminer $\sigma(S)$ en fonction de $\sigma(T_1)$ et $\sigma(T_2)$.

Exercice 4

Soient X, Y des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Montrer l'équivalence entre

1. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in X$, on ait $\|Tx\| \geqslant \alpha\|x\|$.
2. L'opérateur T est injectif et d'image fermée.

Exercice 5

Soit X un espace de Banach réflexif, $F \subset X$ une partie convexe fermée et $x \in X$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe un point $y \in F$ tel que

$$\|x - y\| = d(x, F)$$

1. Soit (y_n) une suite d'éléments de F telle que $\lim_n \|x - y_n\| = d(x, F)$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(y_{\sigma(n)})$ qui converge faiblement vers un point $y \in X$.
2. Montrer que $y \in F$.
3. Montrer que $\|x - y\| = d(x, F)$.

Exercice 6 au verso

Exercice 6

Dans cet exercice, on se donne X un espace de Banach réflexif, $T : X \to X$ une application linéaire continue vérifiant $\|T\| \leqslant 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k,$$

avec la convention que $T^0 = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que pour tout $x \in X$, il existe une sous-suite $(S_{n_k} x)_k$ de la suite $(S_n x)_n$ qui converge faiblement ; on note y sa limite. Montrer que $\lim_{k\to\infty} \|TS_{n_k} - S_{n_k}\| = 0$, et en déduire que $Ty = y$.
2. En déduire qu'il existe une sous-suite $(A_k)_k$, avec $A_k \in \mathrm{conv}\{S_n \ : \ n \in \mathbf{N}\}$ telle que $(A_k x)_k$ converge fortement vers y.
3. Montrer que pour tout $A \in \mathrm{conv}\{T^n \text{ t.q. } n \in \mathbf{N}\}$, on a $\lim_{n\to\infty} (S_n Ax - S_n x) = 0$.
4. En déduire que pout tout $x \in X$, la suite $(S_n x)_n$‘ converge fortement.
5. Pour $x \in X$, on pose $P(x) = \lim_{n\to\infty} S_n x$. Montrer que P est une application linéaire continue, qui est un projecteur (c'est-à-dire qu'elle vérifie $P^2 = P$). Déterminer l'image de P.
6. Application : soient X l'espace de Banach complexe $L^2([0, 1])$ et T l'application linéaire définie par
$$(Tf)(x) = f(x + \theta \mod 1)$$
où θ est un nombre irrationnel. Pour $f \in X$, quelle est la limite de la suite $S_n f$?
Indication. *On pourra utiliser le fait que les fonctions $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ définies par $x \mapsto e^{2i\pi nx}$ forment une base hilbertienne de X.*