

Contrôle final du mercredi 27 mai

Durée : 3 heures

Exercice 1

On note E l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, muni de $\|\cdot\|_\infty$. On considère $T : E \rightarrow E$ définie par $T(f)(x) = f(x+1)$ pour $x \in \mathbf{R}$.

1. Calculer la norme de T .

Solution. Puisque $x \mapsto x+1$ est une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on a pour tout $f \in E$, on a $\sup\{|f(x)| : x \in \mathbf{R}\} = \sup\{|(Tf)(x)| : x \in \mathbf{R}\}$ et donc $\|Tf\| = \|f\|$ donc $\|T\| = 1$.

2. Montrer que $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$.

Solution. Cela découle du fait que le rayon spectral est majoré par la norme

3. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que la fonction $f_\alpha : x \mapsto e^{i\alpha x}$ est un vecteur propre de T .

Solution. On a $(Tf_\alpha)(x) = f_\alpha(x+1) = e^{i\alpha(x+1)} = e^{i\alpha} f_\alpha(x)$ donc f_α est un vecteur propre de valeur propre $e^{i\alpha}$.

4. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de T .

Solution. Puisque $\|Tf\| = \|f\|$, les valeurs propres sont nécessairement de module 1. Au vu la question précédente, l'ensemble des valeurs propres coïncide avec le cercle unité.

5. Montrer que T est inversible. En utilisant l'égalité $T - \lambda \text{id} = T(\text{id} - \lambda T^{-1})$ et en calculant $\|T^{-1}\|$, déterminer $\sigma(T)$.

Solution. L'opérateur $S : E \rightarrow E$ défini par $(Sf)(x) = f(x-1)$ est continu et vérifie $ST = TS = \text{id}_E$, donc T est inversible d'inverse S . Soit $\lambda \neq 0$. La formule $T - \lambda \text{id} = \lambda T(\lambda^{-1} \text{id} - T^{-1})$ implique que $\lambda \in \sigma(T) \iff \lambda^{-1} \sigma(T^{-1})$. Puisque le spectre de T^{-1} est inclus dans le disque unité (même argument que pour T), on en déduit que $\sigma(T) = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$

Exercice 2

Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $\Lambda : L^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant $\|\Lambda\| = 2$ telle que, pour tout fonction continue bornée $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ on ait

$$\Lambda(f) = f(1) - f(0)$$

Solution. Soit $E \subset L^\infty(\mathbf{R})$ le sous-espace formés des fonctions égale presque partout à une fonction continue bornée. La forme linéaire $\Lambda : E \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\Lambda(f) = f(1) - f(0)$ est continue est de norme 2. Par le théorème de prolongement de Hahn-Banach, elle admet un prolongement continue de norme 2.

Exercice 3

Soit H l'espace de Hilbert $L^2([0, 1], \mathbf{R})$. Pour $f \in H$ et pour $t \in [0, 1]$, on pose

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s) \, ds$$

1. Montrer que $T : H \rightarrow H$ est un opérateur (=une application linéaire continue).

On note $T^* : H \rightarrow H$ son adjoint.

Solution. La linéarité de T découle de la linéarité de l'intégrale. Pour $t \in [0, 1]$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|(Tf)(t)| = |\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, f \rangle| \leq \|\mathbf{1}_{[0,t]}\| \cdot \|f\| = \sqrt{t} \|f\| \leq \|f\|$$

donc Tf est bornée par $\|f\|$ et

$$\int_0^1 |(Tf)(t)|^2 \, dt \leq \int_0^1 \|f\|^2 \, dt = \|f\|^2$$

ce qui montre que T est continue et de norme 1.

2. Montrer que pour $f \in H$, la fonction $T(f)$ est continue. Soit $K \subset C([0, 1])$ l'ensemble des fonctions continues qui peuvent s'écrire comme $T(f)$ pour f dans la boule unité de H . En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer que K est d'adhérence compacte dans $C([0, 1])$.

Solution. Le calcul suivant montrera la continuité de Tf . Par le théorème d'Ascoli, il suffit de voir que K est borné et équicontinu. On a vu la question 1 que toute fonction de K est bornée par 1. Par ailleurs, pour $f \in B_H$ et $x \leq y \in [0, 1]$

$$|(Tf)(x) - (Tf)(y)| = \left| \int_x^y (Tf)(t) dt \right| = |\langle \mathbf{1}_{[x,y]}, f \rangle| \leq \| \langle \mathbf{1}_{[0,t]}, f \rangle \| \cdot \|f\| \leq \sqrt{y-x}$$

d'où l'équicontinuité.

3. Montrer que $T : H \rightarrow H$ est un opérateur compact.

Solution. Soit f_n est une suite dans la boule unité de H . Par la question précédente, il existe une sous-suite $f_{\sigma(n)}$ telle que $Tf_{\sigma(n)}$ converge uniformément vers $g \in C([0, 1])$. Puisque $\|Tf_{\sigma(n)} - g\|_2 \leq \|Tf_{\sigma(n)} - g\|_\infty$, la suite $Tf_{\sigma(n)}$ converge vers g dans L^2 . Ceci montre que T est compact.

4. Montrer qu'il existe une base orthonormale de H formée de vecteurs propres de T^*T .

Solution. L'opérateur T^*T est compact par la propriété d'idéal et autoadjoint puisque pour $f, g \in H$,

$$\langle T^*Tf, g \rangle = \langle Tf, Tg \rangle = \langle f, T^*Tg \rangle$$

On peut donc appliquer le théorème spectral.

5. Montrer que pour $f \in H$

$$(T^*f)(t) = \int_t^1 f(s) ds$$

Solution. Pour f, g dans H , on calcule

$$\langle Tf, g \rangle = \int_0^1 (Tf)(t)g(t) dt = \int_0^1 \left(\int_0^t f(s) ds \right) g(t) dt$$

La fonction $(s, t) \mapsto f(s)g(t)$ est dans $L^2([0, 1]^2)$ par le théorème de Tonelli, donc dans $L^1([0, 1]^2)$ et c'est aussi le cas de la fonction $(s, t) \mapsto f(s)g(t)$. Par le théorème de Fubini, on a

$$\langle f, T^*g \rangle = \langle Tf, g \rangle = \int_0^1 \left(\int_s^1 g(t) dt \right) f(s) ds$$

d'où le résultat.

6. On admet que pour $g \in H$, la fonction $T(g)$ (respectivement, $T^*(g)$) est une fonction dérivable dont la dérivée est presque partout égale à g (respectivement, égale à $-g$).

Soit $f \in H$ un vecteur propre de T^*T pour la valeur propre $\lambda \in \mathbf{R}$.

- (a) Montrer que $\lambda > 0$.

Solution. On a $\|Tf\|^2 = \langle Tf, Tf \rangle = \langle T^*Tf, f \rangle = \lambda\|f\|^2$, donc $\lambda \geq 0$. Si $\lambda = 0$, alors $Tf = 0$ donc en dérivant (avec le résultat admis) on a $f = 0$ presque partout, d'où contradiction.

- (b) Montrer que f est (presque partout égale à une) solution de l'équation différentielle $f = -\lambda f''$.

Solution. Puisque $T^*Tf = \lambda f$ dans L^2 , quitte à remplacer f par une fonction qui lui est égale presque partout, on peut supposer que f est continue. Le résultat admis implique que f est dérivable. En dérivant on obtient $-Tf = \lambda f'$ et donc f' est dérivable; en dérivant à nouveau on obtient $-f = \lambda f''$

- (c) En résolvant cette équation différentielle, déterminer le spectre de T^*T .

Solution. Les solutions sont de la forme $f(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ avec $\omega = 1/\sqrt{\lambda}$. Puisque $-Tf = \lambda f'$, la fonction f' est nulle en 0 et donc $B = 0$, ce qui implique $A \neq 0$. Puisque $T^*Tf = \lambda f$, la fonction f est nulle en 1 et donc $\cos \omega = 0$ et $\omega = \pi/2 + k\pi$ pour un entier $k \geq 0$. Réciproquement, on vérifie que la fonction $t \mapsto \cos((\pi/2 + k\pi)t)$ est un vecteur propre de valeur propre $(\pi/2 + k\pi)^{-2}$. Par ailleurs, pour un opérateur compact, le spectre est formé de 0 et de l'ensemble des valeurs propres, donc

$$\sigma(T^*T) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{(\pi/2 + k\pi)^2} : k \in \mathbf{N} \right\}$$

- (d) Montrer que $\|T\| = \frac{2}{\pi}$.

Solution. Pour $f \in H$, on a $\|Tf\|^2 = \langle Tf, Tf \rangle = \langle T^T f, f \rangle$. Soit (f_k) une base orthonormale de vecteurs propres pour T^*T , avec $T^*T f_k = \lambda_k f_k$ et $\lambda_k(\pi/2 + k\pi)^{-2}$. Soit $\alpha_k = \langle f, f_k \rangle$. Par la formule de Parseval, on a $\|f\|^2 = \sum \alpha_k^2$. Par ailleurs, on a $T^*T f = \sum \lambda_k \alpha_k f_k$ au sens de L^2 et donc $\langle T^*T f, f \rangle = \sum \lambda_k \alpha_k^2 \leq \lambda_1 \sum \alpha_k^2$, avec égalité si $f = f_1$. Ainsi $\sup\{\|Tf\|^2 : \|f\| = 1\} = \lambda_1 = (2/\pi)^2$ et donc $\|T\| = 2/\pi$.

Exercice 4

Soit X un espace de Banach et M un sous-espace fermé. Une application linéaire $p : X \rightarrow X$ est un projecteur si elle vérifie $p^2 = p$. On considère les propriétés suivantes.

- (i) Il existe un projecteur continu $p : X \rightarrow X$ d'image M .
- (ii) Il existe un sous-espace fermé $N \subset X$ tel que $X = M \oplus N$.

1. Montrer que (i) implique (ii).

Solution. Il suffit de poser $N = \ker p$. C'est un sous-espace fermé puisque p est continu ; et tout projecteur p sur un espace vectoriel X vérifie $X = \ker(p) \oplus \text{Im}(p)$.

2. Montrer que (ii) implique (i).

Solution. Puisque M et N sont fermés dans X , ce sont des espaces de Banach, et l'espace $M \times N$ muni de la norme $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ est donc aussi un espace de Banach. L'application $u : M \times N \rightarrow X$ définie par $u(x, y) = x + y$ est une bijection linéaire qui est de norme ≤ 1 (par l'inégalité triangulaire). Par le théorème d'isomorphisme de Banach, u^{-1} est continue. L'application $p = q \circ u^{-1}$, où $q : M \times N \rightarrow M$ est l'application continue $(x, y) \mapsto x$, est donc également continue.

Lorsque les propriétés équivalentes (i) et (ii) sont vérifiées, on dit que le sous-espace M est *complémenté*.

3. On suppose dans cette question que X est un espace de Hilbert. Montrer que tout sous-espace vectoriel fermé de X est complémenté.

Solution. Si M est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert, son supplémentaire orthogonal $N = M^\perp$ est fermé ; la propriété (ii) est donc vérifiée.

4. On suppose dans cette question que $\dim(M) < +\infty$. Montrer que M est complémenté.

(Indication. *Étant donnée une base de M , appliquer le théorème de prolongement de Hahn-Banach aux éléments de la base duale*)

Solution. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de M et $f_1, \dots, f_n$ la base duale. Chaque f_i est une forme linéaire sur M , continue car M est de dimension finie. Par le théorème de prolongement de Hahn-Banach, il existe pour chaque i une forme linéaire continue $\ell_i \in X^*$ qui prolonge f_i . L'application $p : X \rightarrow X$ définie par

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \ell_i(x) e_i$$

est continue et c'est un projecteur d'image M , donc (i) est vérifié.