

Contrôle final du mercredi 27 mai

Durée : 3 heures

Exercice 1

On note E l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, muni de $\|\cdot\|_\infty$. On considère $T : E \rightarrow E$ définie par $T(f)(x) = f(x+1)$ pour $x \in \mathbf{R}$.

1. Calculer la norme de T .
2. Montrer que $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$.
3. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que la fonction $f_\alpha : x \mapsto e^{i\alpha x}$ est un vecteur propre de T .
4. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de T .
5. Montrer que T est inversible. En utilisant l'égalité $T - \lambda \text{id} = T(\text{id} - \lambda T^{-1})$ et en calculant $\|T^{-1}\|$, déterminer $\sigma(T)$.

Exercice 2

Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $\Lambda : L^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant $\|\Lambda\| = 2$ telle que, pour tout fonction continue bornée $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ on ait

$$\Lambda(f) = f(1) - f(0)$$

Exercice 3

Soit H l'espace de Hilbert $L^2([0, 1], \mathbf{R})$. Pour $f \in H$ et pour $t \in [0, 1]$, on pose

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s) \, ds$$

1. Montrer que $T : H \rightarrow H$ est un opérateur (=une application linéaire continue).
On note $T^* : H \rightarrow H$ son adjoint.
2. Montrer que pour $f \in H$, la fonction $T(f)$ est continue. Soit $K \subset C([0, 1])$ l'ensemble des fonctions continues qui peuvent s'écrire comme $T(f)$ pour f dans la boule unité de H . En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer que K est d'adhérence compacte dans $C([0, 1])$.
3. Montrer que $T : H \rightarrow H$ est un opérateur compact.
4. Montrer qu'il existe une base orthonormale de H formée de vecteurs propres de T^*T .
5. Montrer que pour $f \in H$

$$(T^*f)(t) = \int_t^1 f(s) \, ds$$

6. On admet que pour $g \in H$, la fonction $T(g)$ (respectivement, $T^*(g)$) est une fonction dérivable dont la dérivée est presque partout égale à g (respectivement, égale à $-g$).
Soit $f \in H$ un vecteur propre de T^*T pour la valeur propre $\lambda \in \mathbf{R}$.
 - (a) Montrer que $\lambda > 0$.
 - (b) Montrer que f est (presque partout égale à une) solution de l'équation différentielle $f = -\lambda f''$.
 - (c) En résolvant cette équation différentielle, déterminer le spectre de T^*T .
 - (d) Montrer que $\|T\| = \frac{2}{\pi}$.

Exercice 4

Soit X un espace de Banach et M un sous-espace fermé. Une application linéaire $p : X \rightarrow X$ est un projecteur si elle vérifie $p^2 = p$. On considère les propriétés suivantes.

- (i) Il existe un projecteur continu $p : X \rightarrow X$ d'image M .
- (ii) Il existe un sous-espace fermé $N \subset X$ tel que $X = M \oplus N$.

1. Montrer que (i) implique (ii).
2. Montrer que (ii) implique (i).

Lorsque les propriétés équivalentes (i) et (ii) sont vérifiées, on dit que le sous-espace M est *complémenté*.

3. On suppose dans cette question que X est un espace de Hilbert. Montrer que tout sous-espace vectoriel fermé de X est complémenté.
4. On suppose dans cette question que $\dim(M) < +\infty$. Montrer que M est complémenté.

(Indication. *Étant donnée une base de M , appliquer le théorème de prolongement de Hahn-Banach aux éléments de la base duale*)