Université Claude Bernard Lyon 1

Master Mathématiques et applications

Groupes classiques et géométries

Contrôle continu n° 1

11 mars 2020

Durée : 1 heure 30

Dans tout le devoir, G désigne un groupe topologique séparé. On en note $\mu : G \times G \to G$ le produit, $\iota : G \to G$ le passage à l'inverse et e le neutre.
On note H un sous-groupe topologique (*i.e.* fermé) de G et $\pi : G \to G/H$ la projection naturelle.

Questions de cours.

1. Rappeler la définition de la topologie quotient sur G/H et montrer que la projection canonique est ouverte et continue.
2. Énoncer et démontrer le théorème d'homéomorphisme pour un groupe compact agissant continûment sur un espace topologique X (homéomorphisme entre $G/\operatorname{Stab}_G(x)$ et $\operatorname{Orb}(x)$, pour $x \in X$).
3. Démontrer que la classe de similitude d'une matrice complexe carrée est fermée si et seulement si la matrice est diagonalisable (*i.e.* semi-simple).

   On rappelle que la classe de similitude d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *est son orbite pour l'action de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *par conjugaison.*

Exercice 1.

Soit

$$\alpha : G \times G/H \to G/H, \quad (g, g'H) \mapsto gg'H$$

l'action de G sur G/H par translation à gauche.

1. Soient g et g' deux éléments de G et U un ouvert de G qui contient gg'. Montrer qu'il existe des ouverts V et V' contenant respectivement g et g' tels que $VV' \subset U$.

   Solution. Comme $\mu^{-1}(U)$ est un ouvert, il contient un voisinage de (g, g') donc, par définition de la topologie produit, un produit d'ouverts de la forme $V \times V'$ contenant (g, g'). On a alors $VV' = \mu(V \times V') \subset U$. □

2. Soit Ω un ouvert de G/H et soit $(g, g') \in G^2$ tel que $\pi(gg') \in \Omega$. Construire un ouvert W de $G \times G/H$ qui contient $(g, \pi(g'))$ et tel que $\alpha(W) \subset \Omega$.

   Solution. Soit $U = \pi^{-1}(\Omega)$ et soient V et V' comme dans la question 1. Notons $U = V \times \pi(V')$. Comme π est ouverte, c'est un ouvert de $G \times G/H$ et il contient $(g, \pi(g'))$. Du fait que $VV' \subset W$, on a bien $\alpha(U) = \pi(VV') \subset \Omega$. □

3. En déduire que α est continue.

   Solution. On vient de vérifier que $\alpha^{-1}(\Omega)$ est un voisinage de tous ses points, i.e. est un ouvert. Cela entraîne que α est continue. □

Exercice 2.

On suppose que H et G/H sont connexes et on veut montrer que G est connexe.

On fixe une application $f : G \to \{0, 1\}$ continue (où $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète).

1. Soit g un élément de G. Démontrer que f est constante sur la classe gH.

Solution. Comme $L_g : G \to G$, $x \mapsto gx$ est un homéomorphisme, la classe gH est homéomorphe à H et donc elle est connexe. Par continuité de f, cette application est constante sur gH. $\square$

Cela entraîne que f induit une application $\bar{f} : G/H \to \{0,1\}$ définie par $\bar{f}\big(\pi(g)\big) = f(g)$ pour tout g de G.

2. Vérifier que $\bar{f}$ est continue.

   Solution. On veut montrer que pour $k \in \{0,1\}$, $\bar{f}^{-1}(\{k\})$ est ouvert dans G/H, c'est-à-dire que $\pi^{-1}\big(\bar{f}^{-1}(\{k\})\big)$ est ouvert dans G. C'est vrai puisque cette partie est $(\bar{f} \circ \pi)^{-1}(\{k\}) = f^{-1}(\{k\})$, qui est un ouvert par continuité de f. $\square$

3. En déduire que f est constante et conclure.

   Solution. On a vu que $\bar{f}$ est continue et, par hypothèse, G/H est connexe donc $\bar{f}$ est constante. Par suite, $f = \bar{f} \circ \pi$ l'est aussi. $\square$

Exercice 3.

Soient m et n deux entiers.

1. Démontrer que l'application rang $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \operatorname{rg}(A)$ est semi-continue inférieurement, c'est-à-dire qu'il existe pour tout A et tout $t < \operatorname{rg}(A)$ un voisinage U de A tel que

$$\forall B \in U, \quad \operatorname{rg}(B) \geq t.$$

   Solution. Soit A dans $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Dire que $\operatorname{rg}(A) = r$, c'est dire que A admet un mineur non nul d'ordre r. Ce mineur est une fonction continue (des coefficients) de A donc il existe un voisinage U de A sur lequel ce mineur est partout non nul. Pour une matrice B de U, on a alors $\operatorname{rg}(B) \geq r \geq t$.
   Variante (on utilise les orbites $\mathscr{R}_s$ de la question suivante). Soit A et soit $t < \operatorname{rg} A$. L'ensemble des B tels que $\operatorname{rg} B \geq t$ est la réunion des $\mathscr{R}_s$ lorsque s décrit $\{\lfloor t \rfloor, \dots, \min(m,n)\}$. Son complémentaire est donc $\overline{\mathscr{R}_{\lfloor t \rfloor - 1}} = \bigcup_{s \leq \lfloor t \rfloor} \mathscr{R}_s$, qui est un fermé. $\square$

2. Rappeler quelles sont les orbites de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et justifier que l'une de ces orbites est dense dans $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

   Solution. Les orbites sont les parties $\mathscr{R}_r$ $(0 \leq r \leq \min(m,n))$ formées des matrices de rang r. L'adhérence de $\mathscr{R}_r$ est l'union des $\mathscr{R}_s$ pour $s \leq r$.
   L'orbite $\mathscr{R}_{\max}$ des matrices de rang $\min(m,n)$ est dense dans $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ car son adhérence contient toutes les orbites $\mathscr{R}_s$ pour $0 \leq s \leq \min(m,n)$ et donc $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ entier. Elle est ouverte car son complémentaire est le fermé $\overline{\mathscr{R}_{\min(m,n)-1}} = \bigcup_{s=0}^{\min(m,n)-1} \mathscr{R}_s$. $\square$

3. En quels points cette application est-elle continue ?

   Solution. Si A appartient à l'orbite $\mathscr{R}_{\max}$, alors l'application R est constante égale à $\min(m,n)$ sur un voisinage de A d'après la question 1 (elle prend des valeurs $\geq \min(m,n)$ sur un voisinage convenable, or c'est le maximum atteint par R). Elle est donc continue en un tel A.
   À présent, soit A une matrice de rang $r < \min(m,n)$. D'après la question 2, il existe une suite $(A_p)_{p \geq 1}$ de matrices de rang $\min(m,n)$ qui converge vers A. Comme $\lim_{p\to\infty} R(A_p) = \min(m,n)$, qui est différent de $R(\lim_{p\to\infty} A_p) = r$, on voit que R n'est pas continue en A. $\square$