Université Claude Bernard Lyon 1

Master Mathématiques et applications

Groupes classiques et géométries

Contrôle continu n° 1

11 mars 2020

Durée : 1 heure 30

Dans tout le devoir, G désigne un groupe topologique séparé. On en note $\mu : G \times G \to G$ le produit, $\iota : G \to G$ le passage à l'inverse et e le neutre.
On note H un sous-groupe topologique (*i.e.* fermé) de G et $\pi : G \to G/H$ la projection naturelle.

Questions de cours.

1. Rappeler la définition de la topologie quotient sur G/H et montrer que la projection canonique est ouverte et continue.
2. Énoncer et démontrer le théorème d'homéomorphisme pour un groupe compact agissant continûment sur un espace topologique X (homéomorphisme entre $G/\operatorname{Stab}_G(x)$ et $\operatorname{Orb}(x)$, pour $x \in X$).
3. Démontrer que la classe de similitude d'une matrice complexe carrée est fermée si et seulement si la matrice est diagonalisable (*i.e.* semi-simple).
   On rappelle que la classe de similitude d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *est son orbite pour l'action de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *par conjugaison.*

Exercice 1.

Soit

$$\alpha : G \times G/H \to G/H, \quad (g, g'H) \mapsto gg'H$$

l'action de G sur G/H par translation à gauche.

1. Soient g et g' deux éléments de G et U un ouvert de G qui contient gg'. Montrer qu'il existe des ouverts V et V' contenant respectivement g et g' tels que $VV' \subset U$.
2. Soit Ω un ouvert de G/H et soit $(g, g') \in G^2$ tel que $\pi(gg') \in \Omega$. À l'aide de la question 1, construire un ouvert W de $G \times G/H$ qui contient $(g, \pi(g'))$ et tel que $\alpha(W) \subset \Omega$.
3. En déduire que α est continue.

Exercice 2.

On suppose que H et G/H sont connexes et on veut montrer que G est connexe. On fixe une application $f : G \to \{0, 1\}$ continue (où $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète).

1. Soit g un élément de G. Démontrer que f est constante sur la classe gH.

Cela entraîne que f induit une application $\bar{f} : G/H \to \{0, 1\}$ définie par $\bar{f}\big(\pi(g)\big) = f(g)$ pour tout g de G.

2. Vérifier que $\bar{f}$ est continue.
3. En déduire que f est constante et conclure.

Exercice 3.

Soient m et n deux entiers.

1. Démontrer que l'application rang $R : \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \operatorname{rg}(A)$ est *semi-continue inférieurement*, c'est-à-dire qu'il existe pour tout A et tout $t < \operatorname{rg}(A)$ un voisinage U de A tel que
$$\forall B \in U, \quad \operatorname{rg}(B) \geq t.$$
2. Rappeler quelles sont les orbites de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (les *classes d'équivalence*) et justifier que l'une de ces orbites est ouverte et dense dans $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que l'application R est continue sur l'orbite ouverte dense précédente et discontinue ailleurs.