Université Claude Bernard Lyon 1

Master Mathématiques et applications

Groupes classiques et géométries

Contrôle terminal à distance

27 mai 2020

Durée : 3 heures

Exercice 1. Montrer que l'espace topologique $[0,1]$ ne peut pas être muni d'une structure de groupe qui en fait un groupe topologique.

Solution. Supposons qu'il existe un produit $\mu : [0,1] \to [0,1]$ qui fasse de $[0,1]$ un groupe topologique. On note, pour $g \in [0,1]$, on note $L_g : [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto \mu(g,x)$. Alors $L_0 \circ L_{1/2}^{-1}$ est un homéomorphisme d'un voisinage de $1/2$ sur un voisinage de 0, ce qui entraîne qu'il existe un intervalle ouvert autour de 0 dans $[0,1]$. □

Exercice 2. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X et soit H un sous-groupe de G. On suppose que H agit transitivement sur X et contient le stabilisateur G_x d'un élément x de X. Démontrer que $H = G$.

Solution. Soit $g \in G$. Comme H agit transitivement sur X, il existe $h \in H$ tel que $g \cdot x = h \cdot x$. Mais alors, $h^{-1}g \in G_x \subset H$, si bien que $g = h\,h^{-1}g \in H$. □

Exercice 3. Soit G un groupe topologique agissant continûment sur un espace métrique X [cette précision est uniquement destinée à pouvoir utiliser les suites pour tester la fermeture]. Démontrer que si K est un sous-groupe compact de G et Y est un fermé de X, alors $KY = \{k \cdot y \ : \ k \in K,\ y \in Y\}$ est fermé.

Solution. Soit y dans l'adhérence de KY. Il existe des suites $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans K et Y telles que $y = \lim_{n\to\infty} k_n \cdot y_n$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite (k_n) converge vers un élément k de K. Alors, $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} k_n^{-1} \cdot (k_n \cdot y_n) = k^{-1} \cdot y$ (par continuité du passage à l'inverse et de l'action) donc, puisque Y est fermé, $k^{-1}y \in Y$. Enfin, $y = k \cdot (k^{-1} \cdot y)$ qui est bien dans KY. □

Exercice 4. Soit n un entier naturel. Pour p et q entiers tels que $p + q \le n$, on note $\mathscr{O}_{p,q}$ l'ensemble des matrices symétriques qui définissent une forme quadratique de signature (p,q).

1. Soit GL^+ le groupe des matrices $n \times n$ réelles de déterminant strictement positif. On rappelle qu'il est connexe. On fait agit GL^+ sur l'espace $\mathscr{S}_n$ des matrices symétriques réelles par congruence : $g \cdot A = gAg^\mathsf{T}$ pour $g \in \mathrm{GL}^+$ et $A \in \mathscr{S}_n$.
   (a) Démontrer que les parties $\mathscr{O}_{p,q}$ sont les orbites de GL^+.

   Solution. D'après le théorème d'inertie de Sylvester, les parties $\mathscr{O}_{p,q}$ sont les orbites de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Puisque GL_n^+ est un sous-groupe de GL_n, l'orbite sous GL_n^+ d'une matrice appartenant à $\mathscr{O}_{p,q}$ est tout entière contenue dans $\mathscr{O}_{p,q}$. Il suffit de montrer que réciproquement, si deux matrices sont dans la même orbite $\mathscr{O}_{p,q}$, alors elles sont dans la même orbite sous GL_n^+. Pour cela, il suffit de montrer que toute matrice de $\mathscr{O}_{p,q}$ est dans l'orbite de $D_{p,q}$ sous GL_n^+, où $D_{p,q} = \mathrm{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1,0,\dots,0)$, avec p coefficients égaux à 1 et q coefficients égaux à -1.

   Soit A une matrice symétrique de signature (p,q). Il existe une matrice inversible P telle que $P \cdot D_{p,q} = A$. Si le déterminant de P est strictement positif, A et B sont dans la même orbite sous GL_n^+. Sinon, posons $P' = P\,\mathrm{diag}(-1,1,\dots,1)$: P' est une matrice de déterminant strictement positif et $P \cdot D = A$. Ainsi, A et D sont dans la même orbite sous GL_n^+. □

   (b) En déduire que pour tout (p,q), la partie $\mathscr{O}_{p,q}$ est connexe.

   Solution. On vient de démontrer que l'application $\mathrm{GL}_n^+ \to \mathscr{O}_{p,q}$, $P \mapsto P \cdot D_{p,q}$ est surjective. Comme GL_n^+ est connexe, il en est de même de $\mathscr{O}_{p,q}$. □

2. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. Démontrer que $\mathscr{O}_{1,1}$ est ouverte mais pas fermée.

   Solution. Deux réels sont non nuls et de signe contraire si, et seulement si leur produit est strictement négatif. Appliquant cette remarque aux valeurs propres d'une matrice symétrique A de taille 2×2, on voit que A appartient à $\mathscr{O}_{1,1}$ si, et seulement si $\det A < 0$. Par continuité du déterminant, cette condition définit un ouvert de l'espace des matrices symétriques.

   En revanche, $\mathscr{O}_{1,1}$ n'est pas fermée car la suite des matrices $\operatorname{diag}(1/k, -1/k)$ ($k \in \mathbb{N}^*$) est à valeurs dans $\mathscr{O}_{1,1}$ mais elle converge vers la matrice nulle, qui appartient à $\mathscr{O}_{0,0}$. □

3. Dans cette question, n est quelconque. Démontrer que $\mathscr{O}_{p,q}$ est fermée si et seulement si $p = q = 0$.

   Solution. Puisque $\mathscr{O}_{0,0} = \{0\}$, c'est une orbite fermée. Si p ou q est strictement positif, la suite de matrices $\operatorname{diag}(1/k, \dots, 1/k, -1/k, \dots, -1/k, 0, \dots, 0)$, où il y a p coefficients > 0 et q coefficient < 0 et où $k \in \mathbb{N}^*$, est à valeurs dans $\mathscr{O}_{p,q}$ alors que sa limite, la matrice nulle, appartient à $\mathscr{O}_{0,0} \neq \mathscr{O}_{p,q}$. □

Exercice 5. Soit q une forme quadratique anisotrope (sans vecteurs isotropes) sur un espace vectoriel réel E de dimension finie. Démontrer de deux façons différentes que q est soit définie positive, soit définie positive :

a) en utilisant l'existence de bases orthogonales ;

b) sans utiliser l'existence de bases orthogonales.

Solution. a) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale de E et soit $a_i = q(e_i)$ ($1 \leq i \leq n$). Si tous les a_i sont de même signe, alors q est définie positive ou définie négative. Sinon, si $a_i < 0$ et $a_j > 0$, alors, comme e_i et e_j sont orthogonaux,

$$q\left(\frac{1}{\sqrt{|a_i|}}e_i + \frac{1}{\sqrt{a_j}}e_j\right) = \frac{1}{-a_i}q(e_i) + \frac{1}{a_j}q(e_j) = 0,$$

contradiction.

b) Supposons qu'il existe deux vecteurs v et v' tels que $q(v) > 0$ et $q(v') < 0$. Comme $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ pour tout scalaire λ, on sait que v et v' ne sont pas colinéaires. Par suite, le vecteur $tv + (1-t)v'$ ne s'annule pour aucun t de $[0, 1]$. Comme la fonction $f : t \mapsto q\big(tv + (1-t)v'\big)$ est continue et change de signe entre 0 et 1, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe t_0 tel que $f(t_0) = 0$, ce qui fournit un vecteur isotrope et une contradiction.

□

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et soit q une forme quadratique non dégénérée sur q.

1. Montrer que si q admet des vecteurs isotropes non nuls, tout réel non nul est la valeur propre d'une isométrie :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \; \exists g \in \mathrm{O}(q), \; \exists v \in E \setminus \{0\}, \quad g(v) = \lambda v.$$

   Première solution. Comme $q(v) = 0 = q(\lambda v)$, l'application $\mathbb{R}v \to \mathbb{R}v$, $v \mapsto \lambda v$ est une isométrie. D'après le théorème de Witt, elle se prolonge en une isométrie $g : E \to E$ pour laquelle v est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

   Deuxième solution. Soit φ la forme bilinéaire associée à q. Comme q est non dégénérée, il existe $v' \in E$ tel que $\varphi(v, v') \neq 0$. Quitte à remplacer v' par $v'/\varphi(v, v')$, on peut supposer $\varphi(v, v') = 0$. La restriction de q à $F = \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}v'$ est non dégénérée (son discriminant est $-\varphi(v, v')^2$) donc $F^\perp$ est un supplémentaire de F. L'application définie par $g(v) = \lambda v$, $g(v') = \lambda^{-1} v'$ et $g|_{F^\perp} = \mathrm{id}_{F^\perp}$ est une isométrie de q. □

2. Montrer que si q est anisotrope, les seules valeurs propres des isométries sont -1 et 1 :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \big[\exists g \in \mathrm{O}(q), \; \exists v \in E \setminus \{0\}, \; g(v) = \lambda v\big] \implies \lambda = \pm 1.$$

   Solution. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, soit g une isométrie et soit v un vecteur propre de g associé à la valeur propre λ. Comme g est une isométrie, on a : $q(v) = q\big(g(v)\big) = q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$. Comme q est anisotrope, on a $q(v) \neq 0$. Par suite, $\lambda^2 = 1$ et $\lambda = \pm 1$. □

Exercice 7. Soit n un entier non nul. Sur l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, soit q la forme quadratique définie par

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad q(A) = \operatorname{tr}(A^2).$$

1. Écrire la forme bilinéaire associée à q.

   Solution. Elle est définie par $b(A, A') = \operatorname{tr}(AA')$. □

2. Déterminer la signature de q et en déduire l'indice de q.
   On pourra calculer $\operatorname{tr}(A^2)$ *en fonction des coefficients* (a_{ij}) *de* A.

   Solution. On a, pour $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$,

$$\operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}a_{ji} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} 2a_{ij}a_{ji} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{(a_{ij}+a_{ji})^2 - (a_{ij}-a_{ji})^2}{2}.$$

   On en déduit que la signature est $\left(n + \frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$ et l'indice de q est $\frac{n(n-1)}{2}$. □

3. Calculer $q(A)$ lorsque A est une matrice nilpotente.

   Solution. Si A est nilpotente, sa seule valeur propre est 0 donc son polynôme caractéristique est X^n, qui est scindé, si bien qu'elle est trigonalisable avec des 0 sur la diagonale. On en déduit que $\operatorname{tr}(A^2) = 0$. □

4. Déterminer un sous-espace totalement isotrope de dimension $n(n-1)/2$ contenu dans l'ensemble $\mathscr{N}$ des matrices nilpotentes.

   Solution. L'espace des matrices triangulaire supérieures nilpotentes convient. Comme sa dimension est l'indice de q, il est maximal. □

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n finie et soit q une forme quadratique non dégénérée sur E ; on note φ la forme bilinéaire associée. Soit D une droite non isotrope, engendrée par un vecteur u. Soit s la réflexion par rapport à D, définie par :

$$\forall v \in E, \quad s(v) = v - 2\frac{\varphi(v,u)}{\varphi(u,u)}u.$$

1. Vérifier que $E = D \oplus D^\perp$.

   Solution. Comme D n'est pas isotrope, $D \cap D^\perp = \{0\}$. Par ailleurs, comme q n'est pas dégénérée, $\dim D + \dim D^\perp = \dim E$. Par suite, $D \oplus D^\perp = E$. □

2. Préciser les sous-espaces propres et les valeurs propres de s.

   Solution. On a $s(u) = -u$ et, si $v \in D^\perp$, $s(v) = v$. Comme D et $D^\perp$ sont supplémentaires, s est diagonalisable et on a $\ker(s + \mathrm{id}_E) = D$ et $\ker(s - \mathrm{id}_E) = D^\perp$. □

3. Vérifier que s est une involution et montrer que c'est une isométrie.

   Solution. On a, pour $v \in E$:

$$\begin{aligned}
s^2(v) &= s(v) - 2\frac{\varphi(s(v),u)}{\varphi(u,u)}u \\
&= v - 2\frac{\varphi(v,u)}{\varphi(u,u)}u - 2\frac{\varphi\left(v - 2\frac{\varphi(v,u)}{\varphi(u,u)}u, u\right)}{\varphi(u,u)}u \\
&= v - 4\frac{\varphi(v,u)}{\varphi(u,u)} + 4\frac{\varphi(v,u)\varphi(u,u)}{\varphi(u,u)}u \\
&= v.
\end{aligned}$$

   Par ailleurs, les restrictions de s à D et $D^\perp$ sont des isométries. Comme ces deux sous-espaces sont supplémentaires et orthogonaux, l'application globale s est une isométrie. □

4. Soit g une isométrie et soit $t = gsg^{-1}$. Vérifier que t est une réflexion et que $\ker(t + \mathrm{id}_E)$ est isométrique à $\ker(s + \mathrm{id}_E)$.

   Solution. Par principe de conjugaison ou par vérification directe, on a $\ker(t + \mathrm{id}_E) = g\big(\ker(s + \mathrm{id}_E)\big)$, c'est-à-dire que l'isométrie g envoie D sur $\ker(t + \mathrm{id}_E)$. □

5. Montrer que la classe de conjugaison de s est l'ensemble des réflexions t par rapport à une droite D' isométrique à D.

   Solution. Vu la question précédente, il suffit de montrer que si D' est une droite isométrique à D, la réflexion t par rapport à D' est dans la classe de conjugaison de D. Pour cela, on part d'une isométrie $\sigma : D \to D'$. Par le théorème de Witt, on peut prolonger σ en une isométrie g de E entier ($g(D) = D'$). Vérifions que $gsg^{-1} = t$. Pour $u' \in D'$, on a $gsg^{-1}(u') = -gg^{-1}(u') = -u'$ puisque $g^{-1}(u') \in D = \ker(s + \mathrm{id}_E)$. Pour $v' \in D'^{\perp}$, on a $gsg^{-1}(v') = gg^{-1}(v') = v'$ puisque $g^{-1}(v') \in D^{\perp} = \ker(s - \mathrm{id}_E)$. Cela caractérise la réflexion t. □