Université Claude Bernard Lyon 1

Master Mathématiques et applications

Groupes classiques et géométries

Contrôle terminal à distance

27 mai 2020

Durée : 3 heures

Exercice 1. Montrer que l'espace topologique $[0,1]$ ne peut pas être muni d'une structure de groupe qui en fait un groupe topologique.

Exercice 2. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X et soit H un sous-groupe de G. On suppose que H agit transitivement sur X et contient le stabilisateur G_x d'un élément x de X. Démontrer que $H = G$.

Exercice 3. Soit G un groupe topologique agissant continûment sur un espace métrique X [cette précision est uniquement destinée à pouvoir utiliser les suites pour tester la fermeture]. Démontrer que si K est un sous-groupe compact de G et Y est un fermé de X, alors $KY = \{k \cdot y \ : \ k \in K, \ y \in Y\}$ est fermé.

Exercice 4. Soit n un entier naturel. Pour p et q entiers tels que $p + q \leq n$, on note $\mathscr{O}_{p,q}$ l'ensemble des matrices symétriques qui définissent une forme quadratique de signature (p,q).

1. Soit GL^+ le groupe des matrices $n \times n$ réelles de déterminant strictement positif. On rappelle qu'il est connexe. On fait agit GL^+ sur l'espace $\mathscr{S}_n$ des matrices symétriques réelles par congruence : $g \cdot A = gAg^{\mathsf{T}}$ pour $g \in \mathrm{GL}^+$ et $A \in \mathscr{S}_n$.
   (a) Démontrer que les parties $\mathscr{O}_{p,q}$ sont les orbites de GL^+.
   (b) En déduire que pour tout (p,q), la partie $\mathscr{O}_{p,q}$ est connexe.
2. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. Démontrer que $\mathscr{O}_{1,1}$ est ouverte mais pas fermée.
3. Dans cette question, n est quelconque. Démontrer que $\mathscr{O}_{p,q}$ est fermée si et seulement si $p = q = 0$.

Exercice 5. Soit q une forme quadratique anisotrope (sans vecteurs isotropes) sur un espace vectoriel réel E de dimension finie. Démontrer de deux façons différentes que q est soit définie positive, soit définie positive :

a) en utilisant l'existence de bases orthogonales ;
b) sans utiliser l'existence de bases orthogonales.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et soit q une forme quadratique non dégénérée sur q.

1. Montrer que si q admet des vecteurs isotropes non nuls, tout réel non nul est la valeur propre d'une isométrie :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \ \exists g \in \mathrm{O}(q), \ \exists v \in E \setminus \{0\}, \quad g(v) = \lambda v.$$
   Première solution. Comme $q(v) = 0 = q(\lambda v)$, l'application $\mathbb{R}v \to \mathbb{R}v$, $v \mapsto \lambda v$ est une isométrie. D'après le théorème de Witt, elle se prolonge en une isométrie $g : E \to E$ pour laquelle v est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
   Deuxième solution. Soit φ la forme bilinéaire associée à q. Comme q est non dégénérée, il existe $v' \in E$ tel que $\varphi(v,v') \neq 0$. Quitte à remplacer v' par $v'/\varphi(v,v')$, on peut supposer $\varphi(v,v') = 0$. La restriction de q à $F = \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}v'$ est non dégénérée (son discriminant est $-\varphi(v,v')^2$) donc $F^\perp$ est un supplémentaire de F. L'application définie par $g(v) = \lambda v$, $g(v') = \lambda^{-1}v'$ et $g|_{F^\perp} = \mathrm{id}_{F^\perp}$ est une isométrie de q. $\square$
2. Montrer que si q est anisotrope, les seules valeurs propres des isométries sont -1 et 1 :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \big[\exists g \in \mathrm{O}(q), \ \exists v \in E \setminus \{0\}, \ g(v) = \lambda v\big] \implies \lambda = \pm 1.$$

Exercice 7. Soit n un entier non nul. Sur l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, soit q la forme quadratique définie par
$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad q(A) = \mathrm{tr}(A^2).$$

1. Écrire la forme bilinéaire associée à q.
2. Déterminer la signature de q et en déduire l'indice de q.
   On pourra calculer $\mathrm{tr}(A^2)$ *en fonction des coefficients* (a_{ij}) *de* A.
3. Calculer $q(A)$ lorsque A est une matrice nilpotente.
4. Déterminer un sous-espace totalement isotrope de dimension $n(n-1)/2$ contenu dans l'ensemble $\mathscr{N}$ des matrices nilpotentes.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n finie et soit q une forme quadratique non dégénérée sur E ; on note φ la forme bilinéaire associée. Soit D une droite non isotrope, engendrée par un vecteur u. Soit s la réflexion par rapport à D, définie par :

$$\forall v \in E, \quad s(v) = v - 2\frac{\varphi(v,u)}{\varphi(u,u)}u.$$

1. Vérifier que $E = D \oplus D^{\perp}$.
2. Préciser les sous-espaces propres et les valeurs propres de s.
3. Vérifier que s est une involution et montrer que c'est une isométrie.
4. Soit g une isométrie et soit $t = gsg^{-1}$. Vérifier que t est une réflexion et que $\ker(t + \mathrm{id}_E)$ est isométrique à $\ker(s + \mathrm{id}_E)$.
5. Montrer que la classe de conjugaison de s est l'ensemble des réflexions t par rapport à une droite D' isométrique à D.