Master 1 **30 mars 2021**
2020–2021

Partiel : Groupes classiques et géométrie

Durée : 2 heures

Les documents ne sont pas autorisés
Les réponses doivent être justifiées

Dans la suite G désigne un groupe topologique *séparé* dont le neutre est noté e.

Questions proches du cours

1. Soit H un sous-groupe fermé de G. On suppose que H est d'indice fini dans G (c'est-à-dire que $[G:H] = |G/H| < +\infty$). Montrer que H est ouvert.

   Solution. Soit $r = |G/H|$, soit $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ une énumération de G/H et soit $\{g_1, \dots, g_r\}$ un ensemble de représentants dans G, c'est-à-dire que $\gamma_i = g_i H$ pour tout i. Pour tout i, la translation $G \to G$, $x \mapsto g_i x$ est un homéomorphisme et H est fermé donc $g_i H$ est fermé. À présent, soit i_0 l'indice tel que $g_{i_0} H = H$. Alors

   $$H = G \setminus \bigcup_{i \neq i_0} g_i H,$$

   qui est un ouvert en tant que complémentaire de la réunion d'un nombre fini de fermés. □

   Commentaire. Question qui aurait dû être facile, très semblable à la propriété bien connue « H ouvert $\Rightarrow$ H fermé ». Quelques confusions apparentes entre $G \setminus H$ (« G privé de H ») et G/H (« G quotienté par H »), qui conduisent à lire « $G \setminus H$ est fini... »

2. Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes topologiques. Soit H un sous-groupe fermé du groupe G qui est distingué et qui est contenu dans le noyau de f et soit $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes topologiques $\phi : G/H \to G'$ tel que $f = \phi \circ \pi$.

   Solution. On sait qu'il existe un unique morphisme de groupes abstraits $\phi : G/H \to G'$ tel que $f = \phi \circ \pi$.

   > En effet, d'une part, pour $\chi \in G/H$, il existe $x \in G$ tel que $\chi = \pi(x)$, ce qui détermine la valeur de $\phi(\chi) = \phi \circ \pi(x) = f(x)$. Cela montre l'unicité.
   >
   > Pour l'existence, il suffit de vérifier que $f(x)$ ne dépend que de χ et pas de x. Si x' est un autre représentant de χ, c'est-à-dire que $\chi = \pi(x) = \pi(x')$, alors l'élément $h = x^{-1}x'$ appartient à H et donc à $\ker f$, de sorte que $f(x') = f(xh) = f(x)f(h) = f(x)$.

   Il s'agit donc de montrer que le morphisme ϕ est continu. Soit W un ouvert de G'. On doit vérifier que $\phi^{-1}(W)$ est ouvert dans G/H. Par définition de la topologie quotient, il est équivalent de dire que $\pi^{-1}\big(\phi^{-1}(W)\big)$ est ouvert dans G, ce qui est vrai puisque $\pi^{-1}\big(\phi^{-1}(W)\big) = f^{-1}(W)$ et que le morphisme f est continu. □

   Commentaire. Question très mal traitée, à deux ou trois exceptions près. Beaucoup ont fait des efforts importants mais rarement convaincants pour montrer l'existence et l'unicité du morphisme de groupes abstraits, propriété utilisées très souvent au S1 (et sans doute avant). Presque personne n'a vu que l'enjeu (la nouveauté par rapport au S1 !) était de montrer que ϕ est *continu.*

3. Montrer que le centre $Z(G) = \{z \in G,\ \forall g \in G,\ zg = gz\}$ est fermé.

Solution. Il suffirait presque d'écrire

$$Z(G) = \bigcap_{g\in G} \{z \in G,\ gzg^{-1}z^{-1} = e\}.$$

Comme le produit $\mu : G\times G \to G$ est continu, il en est de même de $c : G\times G \to G$, $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$ et, à g fixé dans G, de l'application partielle $c_g : G \to G$, $y \mapsto gyg^{-1}y^{-1}$. Il en résulte que $c_g^{-1}\big(\{e\}\big) = \{z \in G,\ c_g(z) = e\}$ est fermé pour tout g et que $Z(G)$, qui est l'intersection des fermés $c_g^{-1}\big(\{e\}\big)$, est fermé. □

Commentaire. Beaucoup de confusion dans le rôle des variables. Quelques réponses font apparaître $Z(G)$ comme l'image réciproque de $\{e\}$ par *une seule* application continue $z \mapsto gzg^{-1}z^{-1}$: mais qui peut bien être ce g ?

Contrairement à ce qu'au moins une personne pense, écrire $f : G \times G \to G$, $(g, g) \mapsto gzg^{-1}z^{-1}$ ne définit rien du tout.

Exercice 1. 1. Montrer que si W est ouvert de G contenant e, alors $\overline{W} \subset W^{-1}W$.

Solution. Soit $g \in \overline{V}$. Alors Wg est un voisinage de g donc $Wg \cap W$ n'est pas vide. Il existe donc $x_1, x_2 \in W$ tels que $x_1g = x_2$, ce qui montre que $g = x_1^{-1}x_2 \in W^{-1}W$. □

2. En déduire que le groupe topologique séparé G est régulier, c'est-à-dire que pour tout ouvert U de G et tout x dans U, il existe un ouvert V tel que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

Solution. Comme x appartient à U et que les translations sont des homéomorphismes, le translaté $x^{-1}U$ est un voisinage ouvert de e. La continuité de $f : G\times G \to G$, $(u, v) \mapsto u^{-1}v$ et le fait que $f(e, e) = e$ assurent qu'il existe un voisinage W de e tel que $W^{-1}W \subset x^{-1}U$. Alors $\overline{W} \subset W^{-1}W \subset x^{-1}U$, d'où $x \in xW \subset x\overline{W} \subset U$. On peut conclure car $x\overline{W} = \overline{xW}$, vu que $L_x : G \to G$, $y \mapsto xy$ est un homéomorphisme. Ainsi, $V = W$ convient. □

Commentaire. Comment trouver cela ? Il est naturel de vouloir utiliser la question précédente, ce qui conduit à chercher W tel que $W^{-1}W \subset U$. Dans l'exemple où $G = \mathbb{R}$, on voit que si $U = \left]-\alpha, \alpha\right[$, il faut que $W \subset \left]-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right[$. C'est le produit de G qui permet de « diviser la taille par deux », c'est-à-dire de produire un tel W en général, ou plutôt sa variante f.

Exercice 2. Soit $\mathscr{T}'$ l'ensemble des parties U de $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\left]a, +\infty\right[\subset U$ et soit $\mathscr{T} = \mathscr{T}' \cup \{\emptyset\}$.

1. Vérifier que $\mathscr{T}$ est une topologie. Est-elle séparée ?

Solution. L'ensemble vide et $\mathbb{R}$, qui contient $\left]0, +\infty\right[$, appartiennent à $\mathscr{T}$. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de $\mathscr{T}$, de deux choses l'une : soit tous les U_i sont vides, alors $\bigcup_{i\in I} U_i$ est vide et appartient à $\mathscr{T}$; soit au moins un des U_i n'est pas vide, disons que U_{i_0} contient $\left]a, +\infty\right[$, auquel cas $\bigcup_{i\in I} U_i$ contient aussi $\left]a, +\infty\right[$.

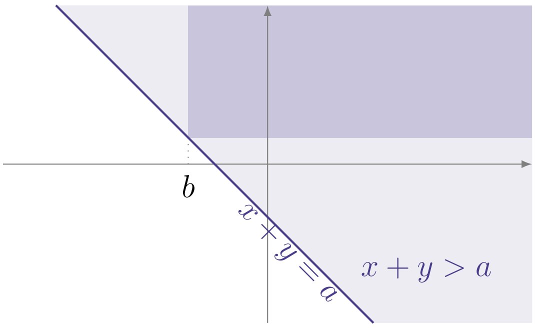
Enfin, soit $(U_i)_{1\le i\le r}$ une famille finie de $\mathscr{T}$. De deux choses l'une : soit l'un des U_i est vide, alors $\bigcap_{i\in I} U_i$ est vide et appartient à $\mathscr{T}$; soit aucun des U_i n'est vide, alors chaque U_i contient un intervalle $\left]a_i, +\infty\right[$, auquel cas $\bigcap_{i\in I} U_i$ contient $\left]a, +\infty\right[$ où $a = \max(a_1, \dots, a_r)$.

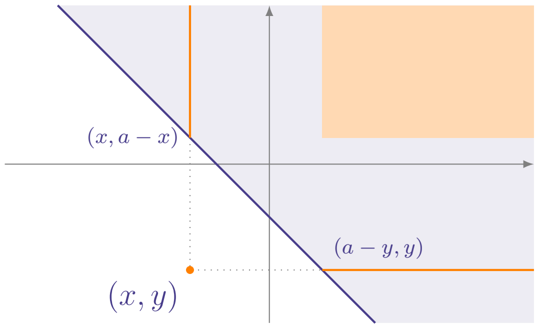
La topologie n'est pas séparée parce que l'intersection de deux ouverts non vides contient toujours un intervalle de la forme $\left]a, +\infty\right[$. (Faut-il préciser ? Étant donnés x et y distincts, impossible de trouver deux ouverts disjoints qui contiennent respectivement x et y !) □

Commentaire. Question assez bien traitée. Les copies qui essaient de vérifier calmement les axiomes d'une topologie parviennent généralement au bout. Quelques affirmations non justifiées ($\mathbb{R} \in \mathscr{T}$ par exemple).
La deuxième partie de la question était considérée comme facile. Certaines copies laissent penser qu'il est équivalent de dire qu'une topologie est séparée et que les singletons sont fermés. L'exemple de $\mathscr{T}$ montre que que ce n'est pas le cas : les singletons sont bien fermés (le complémentaire de $\{a\}$ contient $]a, +\infty[$) mais cela ne suffit pas à garantir la séparation.

2. Démontrer que l'addition $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ est continue (où $\mathbb{R}^2$ est muni de la topologie produit ; *délicat*) mais que $\mathbb{R}$ muni de $\mathscr{T}$ n'est pas un groupe topologique.

Solution. Soit U un ouvert non vide, soit a tel que $]a, +\infty[\subset U$. On dessine $\mu^{-1}(]a, +\infty[)$.





On a (figure de gauche) :

$$\mu^{-1}(]a, +\infty[) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y > a\right\} = \bigcup_{b \in \mathbb{R}}]b, +\infty[\times]-b + a, +\infty[\subset \mu^{-1}(U),$$

ce qui montre que $\mu^{-1}(]a, +\infty[)$ est un ouvert de la topologie produit. En particulier, pour $(x, y) \in \mu^{-1}(U)$ tel que $x + y > a$, cet ouvert est un voisinage contenu dans $\mu^{-1}(U)$.
Par ailleurs, pour $(x, y) \in \mu^{-1}(U)$ tel que $x + y \leq a$, on a

$$(x, y) \in \big(\{x\} \cup]a - y, +\infty[\big) \times \big(\{y\} \cup]a - x, +\infty[\big) \subset \mu^{-1}(U),$$

et le produit au milieu (en orange sur la figure de droite) est un ouvert de la topologie produit.
En revanche, le passage à l'opposé $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$ n'est pas continu puisque l'image réciproque de $]1, +\infty[$ est l'ensemble non vide $]-\infty, -1[$, qui ne contient aucun intervalle $]a, +\infty[$ et n'est donc pas un ouvert de $\mathscr{T}$. □

Commentaire. La continité de l'addition μ n'a l'air de rien mais elle se révèle malcommode. C'est que la topologie est un peu exotique et comprendre la topologie produit demande un effort. En revanche, la deuxième partie de la question aurait dû être facile : si l'addition est continue, le seul obstacle pour faire de $\mathbb{R}$ un groupe topologique est la continuité du passage à l'opposé ι et il n'est pas difficile de calculer l'image réciproque d'un $]a, +\infty[$.

Exercice 3. 1. Montrer que le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$.

Solution. Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ – elle est orthonormée et directe. Soit v un vecteur de S^{n-1}. On complète v en une base orthonormée $\mathbf{v} = (v, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ – on commence par compléter en une base quelconque grâce au théorème de la base incomplète puis on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Quitte à changer v_n en $-v_n$ si nécessaire, on peut supposer que $\mathbf{v}$ est directe. La matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{v}$ est un élément de $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$. □

Commentaire. Résultats décevants pour cette question, bien traitée dans un tiers des copies.

2. Justifier que $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$ est homéomorphe à S^{n-1} pour $n \geq 2$.

Solution. Ici, il faut comprendre $\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$ comme injecté dans le groupe $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ en tant que groupe des isométries directe d'un hyperplan, par exemple ainsi :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} : \ h \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R}),\ {}^t hh = \mathrm{I}_{n-1} \right\}.$$

Première version. Montrons que le stabilisateur d'un vecteur v de S^{n-1} est isomorphe à $\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$.

On constate que si une isométrie $g \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ fixe v, alors elle fixe l'hyperplan $v^\perp$ (pour $w \in v^\perp$, on a $\langle v, gw\rangle = \langle gv, gw\rangle = \langle v, w\rangle = 0$). De plus, comme g préserve l'orientation de $\mathbb{R}^n$ et l'orientation de la droite $\mathbb{R}v$ déterminée[1] par v, elle préserve l'orientation de $v^\perp$, de sorte que l'isométrie induite par g sur $v^\perp$ est directe.

Réciproquement, si $g \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ se restreint en une isométrie directe de $v^\perp$, alors $g(v)$ appartient à $(v^\perp)^\perp = \mathbb{R}v$ (même genre de calcul que ci-dessus), si bien que $gv = \pm v$. Comme g et sa restriction à $v^\perp$ sont directes, l'orientation de $\mathbb{R}v$ est préservée, c'est-à-dire que $gv = v$.

Deuxième version. Montrons que le stabilisateur de e_1 est (isomorphe à) $\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$. Soit $g \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, on coupe g en blocs de sorte que le bloc supérieur gauche soit de taille 1×1 :

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R},\ b, {}^t c \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}),\ d \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Alors g fixe e_1 si et seulement si $a = 1$ et $b = 0$. L'égalité ${}^t gg = \mathrm{I}_n$ entraîne que $b = 0$ et que $d \in \mathrm{O}(n-1,\mathbb{R})$. Enfin, vu que $1 = \det g = a \det d$, on obtient $d \in \mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$. Le stabilisateur de e_1 est donc inclus dans le groupe des matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ où d parcourt $\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$, qui est isomorphe à $\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$ comme groupe topologique. L'inclusion réciproque est évidente.

Conclusion. Le groupe $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ est compact et l'action $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ sur S^{n-1} est continue donc l'application orbitale $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})/H \to S^{n-1}$, $gH \mapsto ge_1$ est un homéomorphisme où H est le stabilisateur de e_1, qui comme on vient de le voir est isomorphe à $\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$ comme groupes topologiques. □

Commentaire. Résultats décevants pour cette question, bien traitée dans un tiers des copies.

3. Montrer que que $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ est connexe pour tout $n \geq 2$. *(Rappel : S^{n-1} est connexe.)*

Solution. Le groupe $\mathrm{SO}(1,\mathbb{R}) = \{1\}$ est trivialement connexe.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 On suppose que $\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$ est connexe. Comme $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$ est homéomorphe à S^{n-1} et donc également connexe, on en déduit que $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ est connexe. Par récurrence, $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ est connexe pour tout $n \geq 2$. □

1. Étant donné un vecteur v orthogonal à un hyperplan H et une orientation de $\mathbb{R}^n$, on oriente H ainsi : une base $(w_1, \ldots, w_{n-1})$ de H est directe si et seulement si la base $(v, w_1, \ldots, w_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$ est directe.

Commentaire. La récurrence n'a pas sauté aux yeux de tout le monde. La question pouvait se faire avec l'énoncé et un résultat du cours (G connexe SSI H et G/H connexes).

4. Décrire les composantes connexes de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

   Solution. Le déterminant donne lieu à une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \{-1,1\} \longrightarrow 1,$$

   c'est-à-dire que c'est une surjection [2] sur $\{-1,1\}$ et que son noyau est $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$. On en déduit que $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \cup s\,\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, où s est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1,\dots,1,-1)$. Comme la translation $g \mapsto sg$ par s est un homéomorphisme de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, la question précédente montre que les composantes connexes de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ sont $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ et son complémentaire $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$. □

   Commentaire. La justification de la connexité de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ a souvent péché.

Exercice 4. On dit qu'un espace topologique X est un espace homogène s'il existe un groupe topologique G et une action $\alpha : G \times X \to X$ continue et transitive de G sur X (i.e. α est continue et X est l'orbite de l'un de ses points).

1. Soit $X =]0,+\infty[$ muni de sa topologie usuelle. Démontrer que X est un espace homogène.

   Solution. On peut prendre pour groupe $G = \mathbb{R}^{+*}$ agissant sur lui-même par translations à gauche, c'est-à-dire $\alpha : \mathbb{R}^{+*} \times]0,+\infty[\to]0,+\infty[$, $(g,x) \mapsto gx$. Comme toute action de ce genre, elle est transitive (avec des notations habituelles, pour tout g, l'application $L_g : x \mapsto gx$ est bijective et sa réciproque est $L_{g^{-1}}$). □

   Commentaire. Cette question aurait dû être traitée par tout le monde !

2. Soit $X = [0,+\infty[$ muni de sa topologie usuelle. Démontrer que X n'est pas un espace homogène. *(Étudier le voisinage de 0.)*

   Solution. Supposons que $[0,+\infty[$ soit un espace homogène et soit $\alpha : G \times [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une action continue transitive. Soit g un élément du groupe qui envoie 0 sur 1, i.e. $\alpha(g,0) = 1$. Alors, l'application $[0,+\infty[\to [0,+\infty[$, $x \mapsto \alpha(g,x)$ est un homéomorphisme (elle est continue et la réciproque est $x \mapsto \alpha(g^{-1},x)$) donc elle envoie $U = \left[0,\frac{1}{2}\right[$, qui est un voisinage de 0, sur un voisinage de 1. C'est impossible car $U \setminus \{0\}$ est connexe alors que pour tout voisinage V de $1 = \alpha(g,0)$, le voisinage épointé $V \setminus \{1\}$ n'est pas connexe. □

   Commentaire. Informellement, l'idée est que « les voisinages de 0 ne ressemblent pas à ceux des autres points de $[0,+\infty[$ » parce que « 0 est sur le bord ». L'argument n'était pas forcément facile à formaliser mais il n'a en fait jamais ou presque jamais été entrevu.

2. Le déterminant d'une matrice orthogonale g vaut ± 1 car $1 = \det \mathrm{I}_n = \det({}^t g g) = (\det g)^2$. Le déterminant est surjectif car le déterminant de la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1,\dots,1,-1)$ vaut -1.