Master 1 **30 mars 2021**
2020–2021

Partiel : Groupes classiques et géométrie

Durée : 2 heures

Les documents ne sont pas autorisés
Les réponses doivent être justifiées

Dans la suite G désigne un groupe topologique *séparé* dont le neutre est noté e.

Questions proches du cours

1. Soit H un sous-groupe fermé de G. On suppose que H est d'indice fini dans G (c'est-à-dire que $[G:H] = |G/H| < +\infty$). Montrer que H est ouvert.
2. Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes topologiques. Soit H un sous-groupe fermé du groupe G qui est distingué et qui est contenu dans le noyau de f et soit $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes topologiques $\phi : G/H \to G'$ tel que $f = \phi \circ \pi$.
3. Montrer que le centre $Z(G) = \{z \in G,\ \forall g \in G,\ zg = gz\}$ est fermé.

Exercice 1. 1. Montrer que si W est ouvert de G contenant e, alors $\overline{W} \subset W^{-1}W$.

2. En déduire que le groupe topologique séparé G est régulier, c'est-à-dire que pour tout ouvert U de G et tout x dans U, il existe un ouvert V tel que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

Exercice 2. Soit $\mathscr{T}'$ l'ensemble des parties U de $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a, +\infty[\ \subset U$ et soit $\mathscr{T} = \mathscr{T}' \cup \{\emptyset\}$.

1. Vérifier que $\mathscr{T}$ est une topologie. Est-elle séparée ?
2. Démontrer que l'addition $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ est continue (où $\mathbb{R}^2$ est muni de la topologie produit ; *délicat*) mais que $\mathbb{R}$ muni de $\mathscr{T}$ n'est pas un groupe topologique.

Exercice 3. 1. Montrer que le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$.

2. Justifier que $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n-1, \mathbb{R})$ est homéomorphe à S^{n-1} pour $n \geq 2$.
3. Montrer que que $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ est connexe pour tout $n \geq 2$. *(Rappel : S^{n-1} est connexe.)*
4. Décrire les composantes connexes de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

Exercice 4. On dit qu'un espace topologique X est un espace homogène s'il existe un groupe topologique G et une action $\alpha : G \times X \to X$ continue et transitive de G sur X (i.e. α est continue et X est l'orbite de l'un de ses points).

1. Soit $X =]0, +\infty[$ muni de sa topologie usuelle. Démontrer que X est un espace homogène.
2. Soit $X = [0, +\infty[$ muni de sa topologie usuelle. Démontrer que X n'est pas un espace homogène. *(Étudier le voisinage de 0.)*