Master 1 **10 mars 2022**
2021–2022

CC1 : Groupes classiques et géométrie

Durée : 1h30 heures

Les documents ne sont pas autorisés
Les réponses doivent être justifiées

Exercice 1 Soit G un groupe topologique.

1. Montrer que pour tout $g \in G$, l'appplication $L_g : G \to G$ définie pour $x \in G$ par $L_g(x) = gx$ est un homéomorphisme de G sur lui-même.
   Solution. L'application $L_g : G \to G$ est continue car c'est une application partielle de la loi de composition de G. Puisque $L_g L_{g^{-1}} = L_{g^{-1}} L_g$ est l'identité, L_g est bijective de bijection réciproque $L_{g^{-1}}$ continue ; c'est donc un homéomorpphisme de G sur G.
2. Montrer que pour tous x, y dans G, il existe un homéomorphisme de G sur lui-même qui envoie x sur y. **Solution.** L'homéomorphisme L_g pour $g = yx^{-1}$ convient.
3. En déduire que $[0,1]$ n'est homéomorphe à aucun groupe topologique.
   Solution. S'il l'était, par la question précédente, il existerait un homéomorphisme de $[0,1]$ sur lui-même envoyant 0 sur $1/2$. Mais c'est impossible puisque $[0,1] \setminus \{0\}$ est connexe alors que $[0,1] \setminus \{1/2\}$ n'est pas connexe, et que l'image continue d'un connexe est connexe.

Exercice 2 Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G, muni de la topologie induite. On rappelle que H est dit *discret* si tout singleton de H est ouvert dans H.

1. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
   (a) H est discret,
   (b) il existe un $g \in H$ tel que $\{g\}$ est ouvert dans H,
   (c) toute partie de H est fermée.

   Solution. Remarquons que (c) équivaut à dire "toute partie de H est ouverte" en passant au complémentaire. L'implications (c) $\Rightarrow$ (b) est évidente. L'implication (a) $\Rightarrow$ (c) résulte de la remarque que toute partie est réunion de singletons et qu'une réunion d'ouverts est ouverte. Montrons (b) $\Rightarrow$ (a). Si $\{g\}$ est ouvert, alors $\{\phi(g)\}$ est ouvert pour tout homéomorphisme $\phi : H \to H$, et on conclut d'après la question 2 de l'exercice 1.
2. Soit $G = \mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle, c'est-à-dire la topologie induite par la norme euclidienne $\|\cdot\|$. (Rappelons que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.) Soient $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ et $H = \mathbb{Z}x_1 + \cdots + \mathbb{Z}x_r$. Montrer que H est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$.
   Solution. D'après la question 1, il suffit de montrer que $\{0\}$ est ouvert dans H. Complétons $(x_1, \ldots, x_r)$ en une base $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on note $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la bijection linéaire vérifiant $f(x_i) = e_i$; c'est un homéomoprhisme de $\mathbb{R}^n$. Soit B la boule-unité ouverte de $\mathbb{R}^n$. Alors $f(H) = \mathbb{Z}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}e_r$ et on a donc $f(H) \cap B = \{0\}$ puis $H \cap f^{-1}(B) = \{0\}$, ce qui montre que $\{0\}$ est ouvert dans H.

3. *On se propose de montrer que la réciproque du 2. est vraie.*
   Soit H un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Si $n = 1$, montrer que $H = \mathbb{Z}x_1$ pour $x_1 \in \mathbb{R}^*$.
   Solution. L'ensemble $H \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide (H contient un élément non nul ainsi que son opposé, et l'un des deux est strictement positif) donc admet une borne inférieure que l'on note x_1. On a néssairement $x_1 > 0$ (car $\{0\}$ est ouvert dans H) et $x_1 \in H$ (sinon, il existerait une suite (y_n) strictement décroissante tendant vers x_1, et $(y_{n+1} - y_n)$ serait une suite d'éléments de $H \setminus \{0\}$ convergeant vers 0, contredisant le fait que $\{0\}$ est ouvert dans H). On a donc $\mathbb{Z}x_1 \subset H$. Réciproquement, tout élément $y \in H$ s'écrit $y = x_1(\lfloor y/x_1 \rfloor + \{y/x_1\})$ (parties entière et fractionnaire), donc $\{y/x_1\} \in H \cap [0, 1[= \{0\}$. Ainsi y est bien multiple entier de x_1.
   (b) Dans le cas général où $n \geq 1$, montrer l'existence d'un vecteur $x_1 \in H \setminus \{0\}$ tel que $\|x_1\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in H \setminus \{0\}$.
   Solution. Soit $\alpha = \inf\{\|x\| : x \in H \setminus \{0\}\}$. Il faut montrer que la borne inférieure est atteinte. Soit (y_n) une suite d'éléments de $H \setminus \{0\}$ telle que $\lim \|y_n\| = \alpha$. Comme (y_n) est bornée, il existe une sous-suite convergente $y_{\sigma(n)}$; notons y sa limite. La suite $(y_{\sigma(n+1)} - y_{\sigma(n)})$ est une suite d'éléments de H qui tend vers 0 ; comme $\{0\}$ est ouvert dans H, elle est stationnaire. On a donc $y \in H \setminus \{0\}$.
   (c) Avec x_1 comme ci-dessus, soit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}x_1 \oplus (\mathbb{R}x_1)^\perp$ et $\pi : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}x_1)^\perp$ la projection. En utilisant que $(\mathbb{R}x_1)^\perp$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$, montrer que $\pi(H)$ est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}x_1)^\perp$. (Indication : raisonner par l'absurde.)
   Solution. Puisque l'application π est linéaire, c'est un morphisme de groupes et donc $\pi(H)$ est un sous-groupe de $\pi(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}x_1)^\perp$. Montrons que $\pi(H)$ est discret ; d'après la première question il suffit de montrer que $\{0\}$ est ouvert dans $\pi(H)$. Soit $x \in H$ tel que $y := \pi(x) \neq 0$. Posons $z = x - \pi(x) \in \mathbb{R}x_1$. On peut l'écrire $z = \lambda x_1$ pour un réel $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\mu \in \mathbb{Z}$ l'entier le plus proche de λ ; il vérifie $|\lambda - \mu| \leq 1/2$. Puisque $\mu x_1 \in H$, on a $x - \mu x_1 = y + (\lambda - \mu)x_1 \in H \setminus \{0\}$, et donc
   $$\|x_1\| \leq \|y + (\lambda - \mu)x_1\| \leq \|y\| + \frac{1}{2}\|x_1\|$$
   (la première inégalité est par définition de x_1, la seconde par inégalité triangulaire). On conclut que $\|y\| \geq \|x_1\|/2$. Ainsi l'intersection de $\pi(H)$ avec la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\|x_1\|/2$ est réduite à $\{0\}$, ce qui montre que $\{0\}$ est ouvert dans $\pi(H)$.
   (d) Montrer qu'il existe des vecteurs $x_1, \dots, x_r$, linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$, tels que $H = \mathbb{Z}x_1 + \cdots + \mathbb{Z}x_r$. (Indication : raisonner par récurrence sur n.)
   Solution. Comme $\pi(H)$ est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}x_1)^\perp$ (qui est un groupe topologique homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$), par hypothèse de récurrence, il est soit $\{0\}$ soit de la forme $\mathbb{Z}y_2 + \cdots + \mathbb{Z}y_r$ pour $y_2, \dots, y_r$ dans $\pi(H)$. Choisissons $x_2, \dots, x_r$ dans H tels que $\pi(x_i) = y_i$. On a alors
   $$\mathbb{Z}x_1 + \cdots + \mathbb{Z}x_r \subset H$$
   et on pourra conclure si on montre que cette inclusion est une égalité. Soit $z \in H$. Comme $\pi(z) \in \pi(H)$, il peut s'écrire $\pi(z) = \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_r y_r$ avec $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{Z}$. Le vecteur $w = z - \lambda_2 x_2 - \cdots - \lambda_r x_r$ est dans le noyau de π, donc de la forme λx_1 pour $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Comme par ailleurs $w \in H$, on a nécessairement $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$ (sinon, le vecteur non nul $(\lambda_1 - \lfloor \lambda_1 \rfloor)x_1$ serait de norme strictement inférieure à celle de x_1, contredisant le (b).)

Exercice 3 Soit $G = SL_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Soit $i \neq j$ et $U_{ij} = \{u_{ij}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ où $u_{ij}(t)$ est la matrice triangulaire dans G de coefficients 1 sur la diagonale principale, dont le coefficient de i-ème ligne et j-ème colonne est égal à t et dont les coefficients restants sont égaux à 0.

1. Montrer que U_{ij} est un sous-groupe fermé de G, isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.
   Solution. Un calcul élémentaire montre que $u_{ij}(s)u_{ij}(t) = u_{ij}(s+t)$, donc U_{ij} est un sous-groupe de G isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$. Il est fermé car c'est un sous-espace affine de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que G est engendré par les U_{ij}.
   Solution. Multiplier une matrice A à gauche/droite par $U_{ij}(t)$ revient à ajouter à la $i$ème ligne/colonne t fois la $j$ème ligne/colonne. Il faut donc montrer que toute matrice $(a_{ij}) \in SL_n(\mathbb{R})$ peut être transformée en l'identité par des opérations de ce type. Voici un algorithme possible, par récurrence sur n
   (a) Si $a_{12} = 0$, choisir j tel que $a_{ij} \neq 0$ et ajouter la colonne j à la colonne i pour se ramener au cas $a_{12} \neq 0$,
   (b) Soustraire $(a_{11} - 1)a_{21}^{-1}$ fois la colonne 2 à la colonne 1 pour se ramener au cas $a_{11} = 1$.
   (c) Pour tout $j > 1$, soustraire a_{1j} fois la colonne 1 à la colonne j pour se ramener au cas $a_{1j} = 0$, puis a_{j1} fois la ligne 1 à la ligne j pour se ramener au cas $a_{j1} = 0$.
   (d) Comme la sous-matrice $(a_{ij})_{2 \leq i,j \leq n}$ est dans $SL_{n-1}(\mathbb{R})$, elle s'écrit par hypothèse de récurrence sous la forme voulue.
3. Montrer que G est connexe.
   Solution. Chaque sous-groupe U_{ij} est connexe puisque homéomorphe à $\mathbb{R}$. Puisque la réunion des sous-groupes (U_{ij}) engendre G, on peut par un théorème du cours en déduire que G est connexe.
4. Est-ce que G est connexe par arcs ?
   Solution. Oui. Soient g, h dans G ; d'après la question 2 on peut écrire gh^{-1} comme produits d'éléments de U_{ij}, c'est-à-dire que pour un entier N,
   $$g = u_{i_1 j_1}(t_1) u_{i_2 j_2}(t_2) \cdots u_{i_N j_N}(t_N) h$$
   La fonction $\gamma : [0,1] \to G$ définie par
   $$s \mapsto u_{i_1 j_1}(st_1) u_{i_2 j_2}(st_2) \cdots u_{i_N j_N}(st_N) h$$
   est une fonction continue (c'est un polynôme en s) vérifiant $\gamma(0) = h$ et $\gamma(1) = g$, donc G est connexe par arcs.