Master 1 **10 mars 2022**
2021–2022

CC1 : Groupes classiques et géométrie

Durée : 1h30 heures

Les documents ne sont pas autorisés
Les réponses doivent être justifiées

Exercice 1 Soit G un groupe topologique.

1. Montrer que pour tout $g \in G$, l'appplication $L_g : G \to G$ définie pour $x \in G$ par $L_g(x) = gx$ est un homéomorphisme de G sur lui-même.
2. Montrer que pour tous x, y dans G, il existe un homéomorphisme de G sur lui-même qui envoie x sur y.
3. En déduire que $[0, 1]$ n'est homéomorphe à aucun groupe topologique.

Exercice 2 Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G, muni de la topologie induite. On rappelle que H est dit *discret* si tout singleton de H est ouvert dans H.

1. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
   (a) H est discret,
   (b) il existe un $g \in H$ tel que $\{g\}$ est ouvert dans H,
   (c) toute partie de H est fermée.
2. Soit $G = \mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle, c'est-à-dire la topologie induite par la norme euclidienne $\|\cdot\|$. (Rappelons que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.) Soient $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ et $H = \mathbb{Z}x_1 + \cdots + \mathbb{Z}x_r$. Montrer que H est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$.
3. *On se propose de montrer que la réciproque du 2. est vraie.*
   Soit H un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Si $n = 1$, montrer que $H = \mathbb{Z}x_1$ pour $x_1 \in \mathbb{R}^*$.
   (b) Dans le cas général où $n \geq 1$, montrer l'existence d'un vecteur $x_1 \in H \setminus \{0\}$ tel que $\|x_1\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in H \setminus \{0\}$.
   (c) Avec x_1 comme ci-dessus, soit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}x_1 \oplus (\mathbb{R}x_1)^\perp$ et $\pi : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}x_1)^\perp$ la projection. En utilisant que $(\mathbb{R}x_1)^\perp$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$, montrer que $\pi(H)$ est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}x_1)^\perp$. (Indication : raisonner par l'absurde.)
   (d) Montrer qu'il existe des vecteurs $x_1, \ldots, x_r$, linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$, tels que $H = \mathbb{Z}x_1 + \cdots + \mathbb{Z}x_r$. (Indication : raisonner par récurrence sur n.)

Exercice 3 Soit $G = SL_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Soit $i \neq j$ et $U_{ij} = \{u_{ij}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ où $u_{ij}(t)$ est la matrice triangulaire dans G de coefficients 1 sur la diagonale principale, dont le coefficient de i-ème ligne et j-ème colonne est égal à t et dont les coefficients restants sont égaux à 0.

1. Montrer que U_{ij} est un sous-groupe fermé de G, isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.
2. Montrer que G est engendré par les U_{ij}.
3. Montrer que G est connexe.
4. Est-ce que G est connexe par arcs ?