Master 1 **12 avril 2022**
2021–2022

CC1 : Groupes classiques et géométrie

Durée : 1h30 heures

Les documents ne sont pas autorisés
Les réponses doivent être justifiées

Exercice 1 Pour $n \geqslant 2$, on note S^{n-1} la sphère unité de l'espace euclidien. On considère l'action naturelle du groupe spécial orthogonal $SO(n,\mathbb{R})$ sur S^{n-1}.

1. Est-ce que S^{n-1} est connexe ?
   Solution. Oui. Par exemple on peut montrer écrire S^{n-1} comme l'image de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par la fonction fonctinue $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$, et se ramener à montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe. Pour ce dernier point, on peut montrer qu'il est connexe par arcs : si y et z sont dans $\mathbb{R}^n$, on peut trouver un chemin affine par morceaux joignant y à z (si 0 n'est pas sur le segment joignant y à z, la fonction $t \mapsto ty+(1-t)z$ convient ; sinon, puisque $n \geq 2$ on peut trouver $w \in \mathbb{R}^n$ tel que la fonction
   $$t \mapsto \begin{cases} 2ty + (1-2t)w & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (2t-1)w + 2(1-t)z & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$
   ne prenne pas la valeur 0).
2. Est-ce que l'action de $SO(n,\mathbb{R})$ sur S^{n-1} est transitive ?
   Solution. Oui. Soient x et y dans S^{n-1}. On peut trouver des bases orthonormées $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ avec $x_1 = x$ et $y_1 = y$. L'unique application linéaire A sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant $A(x_i) = y_i$ est une transformation orthogonale. Si $A \in SO(n,\mathbb{R})$, il n'y a rien à faire. Si $A \notin SO(n,\mathbb{R})$, alors $\det(A) = -1$ et on peut considérer la matice HA pour $H = \mathrm{diag}(1,\dots,1,-1)$, qui est dans $SO(n,\mathbb{R})$ et vérifie $HA(x) = y$.
3. Déterminer le stabilisateur H de $e_1 = (1,0,\dots,0)$ pour cette action, et montrer qu'il est isomorphe comme groupe topologique à un groupe classique en précisant ce groupe classique. Déterminer les $n \geq 2$ pour lesquels H est un sous-groupe distingué.
   Solution. Une matrice $A = (a_{ij})$ est dans H si et seulement si $Ae_1 = e_1$. On a donc $a_{11} = 0$, et par suite $a_{1i} = a_{i1} = 0$ pour tout $i > 1$. Ainsi H est l'ensemble des matrices de la forme
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
   où B est dans $SO(n-1,\mathbb{R})$. Ainsi H est isomorphe comme groupe topologique à $SO(n-1,\mathbb{R})$. Si $n = 2$, alors H est réduit à l'élément neutre et est donc distingué. Si $n \geq 2$, montrons que H n'est pas distingué. Pour $n = 3$, on peut considérer les matrices de $SO(3,\mathbb{R})$
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in H \quad B(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$
   et vérifier que $B(\pi/4)AB(\pi/4)^{-1}$ n'est pas dans H (le seul vecteur propre de valeur propre 1 est $B(\pi/4)e_1 \neq e_1$). Si $n > 3$, on peut considérer des matrices diagonales par blocs avec un bloc 3×3 formé de A et $B(\theta)$ et un bloc $(n-3) \times (n-3)$ formé de l'identité.

4. Montrer que $SO(n,\mathbb{R})/H$ est homéomorphe à S^{n-1}.
Solution. On peut appliquer le théorème d'homéomorphisme car le groupe $SO(n,\mathbb{R})$ est compact puisque fermé et borné dans $M_n(\mathbb{R})$. Le stabilisateur de e_1 est H et l'orbite de e_1 et S^{n-1} puisque l'action est transitive. La bijection canonique entre $SO(n,\mathbb{R})/H$ et S^{n-1} est donc un homéomorphisme.
5. Montrer par récurrence sur n que $SO(n,\mathbb{R})$ est connexe.
Solution. Le groupe $SO(1,\mathbb{R})$ est connexe puisque réduit à un seul élément. Si on suppose que $SO(n-1,\mathbb{R})$ est connexe pour un $n \geq 2$, alors le sous groupe $H < SO(n,\mathbb{R})$ qui lui est homéomorphe est aussi connexe. Comme S^{n-1} est connexe, on peut déduire de l'homéomorphisme de la question précédente que $SO(n,\mathbb{R})$ est connexe. Ceci termine la preuve par récurrence.

Exercice 2 Soit $n \geqslant 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère l'action du groupe $GL(n,\mathbb{K})$ sur $M_n(\mathbb{K})$ par conjugaison

$$GL(n,\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}), \quad (P,A) \mapsto PAP^{-1}.$$

Désormais on fixe une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ et on note $\mathcal{O}_A = \{PAP^{-1} \,:\, P \in GL(n,\mathbb{K})\}$ l'orbite de A pour cette action.

1. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que $\mathcal{O}_A$ est connexe.
Solution. Puisque $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ est connexe et que l'application définie sur $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ par $P \mapsto PAP^{-1}$ est continue, $\mathcal{O}_1$ est connexe comme image continue d'un ensemble connexe.
2. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   (a) On suppose qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions $\det(B) < 0$ et $AB = BA$. Monter que

   $$\mathcal{O}_A = \{QAQ^{-1} \,:\, Q \in GL^+(n,\mathbb{R})\}$$

   et en déduire que $\mathcal{O}_A$ est connexe. (Indication : on pourra calculer $PBA(PB)^{-1}$.)
   Solution. Notons Z le membre de droite. L'inclusion $Z \subset \mathcal{O}_A$ est évidente. Réciproquement, soit $M \in \mathcal{O}_A$, qui s'écrit $M = PAP^{-1}$. Si $P \in GL^+(n,\mathbb{R})$, alors $M \in Z$. Si $P \in GL^-(n,\mathbb{R})$, alors $PB \in GL^+(n,\mathbb{R})$ et $PBA(PB^{-1}) = PABB^{-1}P^{-1} = PAP^{-1}) = M$, donc $M \in Z$. On a ainsi écrit $\mathcal{O}_A$ comme image continue de connexe $GL^+(n,\mathbb{R})$ par l'application $Q \mapsto QAQ^{-1}$, ce qui montre que $\mathcal{O}_A$ est connexe.
   (b) En déduire que $\mathcal{O}_A$ est connexe lorsque n est impair.
   Solution. Lorsque n est impair, on peut choisir $B = -\mathrm{Id}$, qui est dans $GL^-(n,\mathbb{R})$ et vérifie $AB = BA$ pour tout matrice A. La question précédente implique que $\mathcal{O}_A$ est connexe.
   (c) En déduire que $\mathcal{O}_A$ est connexe lorsque A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   Solution. Ecrivons $A = PDP^{-1}$ pour $P \in GL(n,\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale. Soit E une matrice digaonale de déterminant négatif ; alors A et PEP^{-1} commutent et $\det(PEP^{-1}) > 0$, donc la question (a) implique que $\mathcal{O}_A$ est connexe.
   (d) On désigne par $C(A)$ *le centralisateur de* A *dans* $GL(n,\mathbb{R})$, c.à.d. $C(A) = \{B \in GL(n,\mathbb{R}) : A \cdot B = B \cdot A\}$. Montrer que $C(A)$ est un sous-groupe fermé et que $\mathcal{O}_A$ est homéomorphe à $GL(n,\mathbb{R})/C(A)$. En déduire que si $C(A) \subset GL^+(n,\mathbb{R})$, alors $\mathcal{O}_A$ n'est pas connexe.

Solution. On considère l'action de $GL(n, \mathbb{R})$ sur lui-même par conjugaison, donnée par $(P, A) \mapsto PAP^{-1}$. Le stabilisateur de A pour cette action est $C(A)$; comme l'action est continue, c'est un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$. Le théorème d'homéomorphisme implique que l'orbite $\mathcal{O}(A)$ est homéomorphe au quotient $GL(n, \mathbb{R})/C(A)$. On peut appliquer le théorème d'homéomorphisme puisque $GL(n, \mathbb{R})$ est localement compact (comme ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$ qui est localement compact en tant qu'espace vectoriel de dimension fini) et dénombrable à l'infini (par exemple parce que $GL^+(n, \mathbb{R}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V^k$ où V est un voisinage compact de Id).

Supposons que $C(A) \subset GL^+(n, \mathbb{R})$. Soit $\alpha : GL(n, \mathbb{R}) \to \{-1, 1\}$ la fonction continue $M \mapsto \det(M)/|\det(M)|$. Comme la fonction α est constante égale à 1 sur $C(A)$, elle induit par passage au quotient une fonction continue $\overline{\alpha} : GL(n, \mathbb{R})/C(A) \to \{-1, 1\}$. Cette fonction n'est pas constante (elle vaut 1 sur la classe d'un élément de $GL^+(n, \mathbb{R})$ et -1 sur la classe d'un élément de $GL^-(n, \mathbb{R})$. Par conséquent, $GL(n, \mathbb{R})/C(A)$ n'est pas connexe, donc $\mathcal{O}_A$ non plus.

3. On suppose que $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On se propose de montrer que $\mathcal{O}_A$ est connexe si et seulement si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que si A est non-diagonalisable sur $\mathbb{R}$ admettant une valeur propre réelle λ alors λ est de mutiplicité deux et $C(A) \subset GL^+(2, \mathbb{R})$.
   Solution. Si λ est valeur propre double de A alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} \lambda & t \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$; si A n'est pas diagonalisable alors $t \neq 0$. Si l'on pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on calcule que $BM - MB = \begin{pmatrix} ct & t(a-d) \\ 0 & -ct \end{pmatrix}$. Si $M \in C(B)$, alors $c = 0$ et $a = d$, d'où $\det(M) = a^2 > 0$ et $C(B) \subset GL^+(2, \mathbb{R})$. Puisque $M \in C(B) \iff PMP^{-1} \in C(PBP^{-1})$, on en déduit que $C(A) \subset GL^+(2, \mathbb{R})$.

   (b) Montrer que si A n'a pas de valeurs propres réelles alors $C(A) \subset GL^+(2, \mathbb{R})$.
   Solution. Si A n'a pas de valeur propre réelle, elle est semblable à une matrice de la forme $B = \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix}$ pour des réels s et t avec $t \neq 0$. (Preuve : soient $\lambda \neq \overline{\lambda}$ les valeurs propres complexes correspondant à des vecteurs propres x et $\bar{x}$ de $\mathbb{C}^2$. Posons $y = \Re(x) = \frac{x+\bar{x}}{2}$ et $z = \Im(x) = \frac{x-\bar{x}}{2}$. Alors (y, z) est une base de $\mathbb{R}^2$ et la matrice de A dans cette base est $\begin{pmatrix} \Re(\lambda) & -\Im(\lambda) \\ \Im(\lambda) & \Re(\lambda) \end{pmatrix}$). On vérifie que la matrice B commute avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si et seulement si $c = -b$ et $a = d$. Ceci implique que $C(B) \subset GL^+(2, \mathbb{R})$, et donc (comme à la question précédente) $C(A) \subset GL^+(2, \mathbb{R})$.

   (c) Conclure.
   Solution. On a $\mathcal{O}_A$ connexe $\iff C(A) \subset GL^+(2, \mathbb{R})$ au vu des questions 2a) et 2d). Si A est diagonalisable, $\mathcal{O}_A$ est connexe (question 2c). Si A n'est pas diagonablisable, on conclut que $C(A) \subset GL^+(2, \mathbb{R})$ en utilisant 3a) ou 3b) selon que A admet une valeur propre réelle (qui est nécessairement de multiplcité 2) ou non.