Master 1 **12 avril 2022**
2021–2022

CC1 : Groupes classiques et géométrie

Durée : 1h30 heures

Les documents ne sont pas autorisés
Les réponses doivent être justifiées

Exercice 1 Pour $n \geqslant 2$, on note S^{n-1} la sphère unité de l'espace euclidien. On considère l'action naturelle du groupe spécial orthogonal $SO(n, \mathbb{R})$ sur S^{n-1}.

1. Est-ce que S^{n-1} est connexe ?
2. Est-ce que l'action de $SO(n, \mathbb{R})$ sur S^{n-1} est transitive ?
3. Déterminer le stabilisateur H de $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ pour cette action, et montrer qu'il est isomorphe comme groupe topologique à un groupe classique en précisant ce groupe classique. Déterminer les $n \geq 2$ pour lesquels H est un sous-groupe distingué.
4. Montrer que $SO(n, \mathbb{R})/H$ est homéomorphe à S^{n-1}.
5. Montrer par récurrence sur n que $SO(n, \mathbb{R})$ est connexe.

Exercice 2 Soit $n \geqslant 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère l'action du groupe $GL(n, \mathbb{K})$ sur $M_n(\mathbb{K})$ par conjugaison

$$GL(n, \mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}), \quad (P, A) \mapsto PAP^{-1}.$$

Désormais on fixe une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ et on note $\mathcal{O}_A = \{PAP^{-1} \ : \ P \in GL(n, \mathbb{K})\}$ l'orbite de A pour cette action.

1. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que $\mathcal{O}_A$ est connexe.
2. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   (a) On suppose qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions $\det(B) < 0$ et $AB = BA$. Monter que
   $$\mathcal{O}_A = \{QAQ^{-1} \ : \ Q \in GL^+(n, \mathbb{R})\}$$
   et en déduire que $\mathcal{O}_A$ est connexe. (Indication : on pourra calculer $PBA(PB)^{-1}$.)
   (b) En déduire que $\mathcal{O}_A$ est connexe lorsque n est impair.
   (c) En déduire que $\mathcal{O}_A$ est connexe lorsque A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   (d) On désigne par $C(A)$ *le centralisateur de* A *dans* $GL(n, \mathbb{R})$, c.à.d. $C(A) = \{B \in GL(n, \mathbb{R}) : A \cdot B = B \cdot A\}$. Montrer que $C(A)$ est un sous-groupe fermé et que $\mathcal{O}_A$ est homéomorphe à $GL(n, \mathbb{R})/C(A)$. En déduire que si $C(A) \subset GL^+(n, \mathbb{R})$, alors $\mathcal{O}_A$ n'est pas connexe.
3. On suppose que $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On se propose de montrer que $\mathcal{O}_A$ est connexe si et seulement si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que si A est non-diagonalisable sur $\mathbb{R}$ admettant une valeur propre réelle λ alors λ est de mutiplicité deux et $C(A) \subset GL^+(2, \mathbb{R})$.
   (b) Montrer que si A n'a pas de valeurs propres réelles alors $C(A) \subset GL^+(2, \mathbb{R})$.
   (c) Conclure.