Université Lyon 1 – 2021-2022
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche n° 1

Première partie : yoga dans les groupes topologiques

<u>Exercice 1.1</u> Topologie produit.

Soient G_1, G_2 deux espaces topologiques. On appelle *rectangle ouvert* une partie de $G_1 \times G_2$ de la forme $U_1 \times U_2$, avec U_i un ouvert de G_i. Soit $\mathscr{T}$ la classe des parties de $G_1 \times G_2$ qui sont réunions quelconques de rectangles ouverts.

1. Vérifier que cela définit bien une topologie, appelée *topologie produit*. Montrer que la topologie produit est la plus grossière qui rend continues les projections $p_i : G_1 \times G_2 \to G_i$, $(g_1, g_2) \mapsto g_i$ $(i = 1, 2)$.
2. Vérifier que les projections $p_i : G_1 \times G_2 \to G_i$ sont des applications ouvertes (c'est-à-dire que l'image d'un ouvert est un ouvert).
3. Vérifier que les applications partielles d'une application continue sont continues, c'est-à-dire que pour $f : G_1 \times G_2 \to X$ continue (où X est un espace topologique quelconque) et pour g_i fixés dans G_i, les applications $g \mapsto f(g_1, g)$ et $g \mapsto f(g, g_2)$ sont continues.
4. ☕ On suppose dans cette question que G_1 et G_2 sont compacts.
   (a) Soit $x \in G_1$, et soit W un ouvert de $G_1 \times G_2$ qui contient $\{x\} \times G_2$. Montrer qu'il existe un voisinage U de g_1 dans G_1 tel que $U \times G_2 \subset W$ (« *lemme du tube* »).
   (b) Montrer que $G_1 \times G_2$ est compact.

Dans la suite, on se donne un groupe topologique G séparé dont le neutre est noté e.

<u>Exercice 1.2</u>

1. Soit $g_0 \in G$. Montrer que les applications $L_{g_0} : G \to G$, $g \mapsto g_0 g$ et $R_{g_0} : G \to G$, $g \mapsto g g_0$ sont des homéomorphismes.
2. Montrer que si $U \subset G$ est un ouvert et $V \subset G$ quelconque, alors $U^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in U\}$ et $UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$ sont ouverts.
3. Montrer que si U et V sont compacts alors UV est compact.
   En revanche, le produit de deux fermés n'est pas nécessairement fermé : donner un exemple de groupe et de parties fermées U et V telles que UV n'est pas fermé.

<u>Exercice 1.3</u>

Soit g_0 un point de G.

1. Montrer que l'ensemble des Vg_0 (resp. g_0V) lorsque V parcourt l'ensemble des voisinages de e, est un système fondamental de voisinages du point g_0 de G, c'est-à-dire que tout voisinage de g_0 contient un ensemble de cette forme.
2. Soit $f : G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g g_0 h^{-1}$. Montrer que f est continue. En déduire que l'ensemble des $V g_0 V^{-1}$ lorsque V parcourt l'ensemble des voisinages de e est un système fondamental de voisinages du point g_0 de G.

Exercice 1.4

Pour une partie A de G, on note $\overline{A}$ son adhérence.

1. (a) Soit U un voisinage de e et soient x et y dans G. Montrer qu'il existe un ouvert V contenu dans U tel que $xVyV \subset xyU$.
   (b) En déduire que si x et y sont dans les adhérences $\overline{A}$ et $\overline{B}$ de parties A et B de G, alors $xyU \cap AB \neq \emptyset$.
   (c) Montrer que $\overline{A}\,\overline{B} \subset \overline{AB}$.
2. Montrer que pour toute partie A de G, on a $\overline{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$.
3. Montrer que pour tous x et y dans G, on a $x\,\overline{A}\,y = \overline{xAy}$.
4. Soient A et B deux parties telles que $ab = ba$ pour tout couple $(a, b) \in A \times B$. Montrer que cette relation est vraie pour $(a, b) \in \overline{A} \times \overline{B}$. *Considérer* $f : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$.
5. Montrer que l'adhérence d'un sous-groupe H du groupe abstrait G est un sous-groupe abstrait de G (*vu en cours*). Montrer que H est abélien si et seulement si $\overline{H}$ l'est.

Deuxième partie : sous-groupes de $\mathbb{R}$ et morphismes de source $\mathbb{R}$

Exercice 1.5 Sur la topologie produit

Soit $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$.

1. Vérifier que la topologie produit sur $\mathbb{R}^2$ est la topologie induite par une norme (laquelle ? sens ?).
2. Pour $\varepsilon > 0$, déterminer $\mu^{-1}\big(]-\varepsilon, \varepsilon[\big)$. Quel est le plus grand $\alpha > 0$ tel que $]-\alpha, \alpha[^2 \subset \mu^{-1}\big(]-\varepsilon, \varepsilon[\big)$?

Exercice 1.6

1. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$. On note $a = \inf(G \cap \mathbb{R}^{+*})$.
   (a) Montrer que si a est strictement positif, alors $G = a\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que si a est nul, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire que tout sous-groupe de $\mathbb{R}$ est soit monogène, soit dense.
2. Soit α un réel, on note $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.
   (a) On suppose que $\alpha = \frac{u}{v}$ où u et v sont deux entiers premiers entre eux. Montrer que $G = \frac{1}{v}\mathbb{Z}$.
   (b) On suppose que α est irrationnel. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
   (c) Applications :
      i. Tout élément du cercle unité est une valeur d'adhérence de la suite $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n})_{n\in\mathbb{N}}$.
      ii. Tout élément de $[-1, 1]$ est une valeur d'adhérence de la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$).
      iii. ☕ Il existe une puissance de 2 qui commence par 31415926.

Exercice 1.7

Considérons le sous-groupe abstrait $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$, muni de la topologie métrique induite.

1. Vérifier que $\mathbb{Q}$ n'est pas discret.
2. Montrer que la composante connexe de l'élément neutre 0 est $\{0\}$.

Exercice 1.8 **Morphismes de $\mathbb{R}$ vers...**

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme du groupe (additif).
   (a) Démontrer que $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}\varphi(1)$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
   (b) Montrer que si φ est continu, alors c'est une application linéaire.
   (c) Décrire des morphismes non continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Décrire les morphismes continus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^*$.
3. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ un morphisme continu.
   (a) Vérifier que pour $\alpha > 0$ assez petit, la matrice $\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(s)\mathrm{d}s$ est inversible.
   (b) En déduire que φ est dérivable. *Intégrer la relation* $\forall s, t \in \mathbb{R},\ \varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$.
   (c) Écrire une équation différentielle dont φ est solution et en déduire que tout morphisme est de la forme $t \mapsto \exp(tA)$ pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ convenable.

Troisième partie : topologie dans les espaces de matrices

On fixe deux entiers m et n, on munit $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ de sa topologie naturelle (associée à une norme).

Exercice 1.9 **Préliminaire**

Soient deux matrices A de $\mathscr{M}_m(\mathbb{C})$ et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les applications de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ dans lui-même définies par $L_A : M \mapsto AM$ et $R_B : M \mapsto MB$ sont continues.

Dans la suite, on fixe un entier n et on note $\mathscr{M} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On munit $\mathbb{C}_n[X]$ de sa topologie naturelle.

Exercice 1.10

Montrer que les parties suivantes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont des sous-groupes (topologiques) :

1. l'ensemble T des matrices diagonales ;
2. l'ensemble B des matrices triangulaires supérieures ;
3. l'ensemble N des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux valent 1.

Exercice 1.11 **Densité des matrices complexes diagonalisables**

On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des matrices complexes $n \times n$ diagonalisables et $\mathscr{D}^{\mathrm{reg}}$ l'ensemble des matrices complexes dont le spectre est simple (toutes les valeurs propres sont de multiplicité 1).

1. Vérifier que $\mathscr{D}^{\mathrm{reg}} \subset \mathscr{D}$. L'inclusion est-elle stricte ?
2. Soit $\mathscr{T} \subset \mathscr{M}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures. Démontrer que $\mathscr{D}^{\mathrm{reg}} \cap \mathscr{T}$ est dense dans $\mathscr{T}$.
3. Démontrer que $\mathscr{D}^{\mathrm{reg}}$ est dense dans $\mathscr{M}$. En déduire que $\mathscr{D}$ est dense dans $\mathscr{T}$.
4. Démontrer que le résultat analogue dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est faux si $n \geq 2$.
   Considérer une matrice qui a au moins une valeur propre non réelle et utiliser la continuité du polynôme caractéristique démontrée dans la question 1 de l'exercice .

Exercice 1.12 **Théorème de Cayley–Hamilton**

Soit χ l'application « polynôme caractéristique » qui à une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ associe son polynôme caractéristique χ_A.

1. Rappeler pourquoi l'application $\chi : \mathscr{M} \to \mathbb{C}_n[X]$, $A \mapsto \chi_A$ est continue. Démontrer que l'application d'évaluation $\mathrm{ev} : \mathbb{C}_n[X] \times \mathscr{M} \to \mathscr{M}$, $(P, A) \mapsto P(A)$ est continue. Montrer enfin que l'application $f : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$, $A \mapsto \chi_A(A)$ est continue.
2. Démontrer que $\chi_A(A) = 0$ si A est diagonalisable.
3. À l'aide de l'exercice , démontrer que $\chi_A(A) = 0$ pour toute matrice A de $\mathscr{M}$.