Université Lyon 1 – 2021-2022
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche n° 2

Exercice 2.1 Soient X et Y des espaces topologiques.

1. Montrer que si X est connexe par arcs, alors X est connexe.
2. Montrer que si X est connexe et $f : X \to Y$ est continue, alors $f(X)$ est connexe.
3. Montrer que si $A \subset X$ est connexe et si $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.

Exercice 2.2 Exemples

1. Est-ce que $[0,1] \times \{0,1\}$ est connexe ?
2. Pour $a < b$ réels, est-ce que $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ est connexe ?
3. On pose $K = \{1/n \,:\, n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que la partie de $\mathbb{R}^2$ obtenue par réunion de $\{0\} \times \{0,1\}$, de $K \times [0,1]$ et de $[0,1] \times \{0\}$ est connexe mais pas connexe par arcs.

Exercice 2.3 Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
Pour $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, considérer $f : t \mapsto \det\big((1-t)A + tB\big)$.

Exercice 2.4 Déterminer les composantes connexes des groupes suivants :

1. les groupes $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$;
2. le groupe $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ des matrices M réelles carrées 2×2 telles que ${}^tMM = \mathrm{I}_2$
   (*montrer que* $\mathrm{O}(2)$ *est formé des matrices* $\begin{pmatrix} \cos t & -\varepsilon \sin t \\ \sin t & \varepsilon \cos t \end{pmatrix}$ *pour* $t \in \mathbb{R}$ *et* $\varepsilon \in \{-1, 1\}$) ;
3. le groupe $\mathrm{O}(1,1)$ des matrices M réelles carrées 2×2 telles que ${}^tMJM = \mathrm{I}_2$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
   (*montrer que* $\mathrm{O}(1,1)$ *est formé des matrices* $\begin{pmatrix} \varepsilon \operatorname{ch} t & \varepsilon \operatorname{sh} t \\ \phi \operatorname{sh} t & \phi \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$ *pour* $t \in \mathbb{R}$ *et* $\varepsilon, \phi \in \{-1, 1\}$).

Exercice 2.5 Composante neutre

Soit G un groupe topologique et soit G_0 la composante connexe du neutre e.

1. Montrer que G_0 est fermée.
   Remarque : G_0 peut ne être pas ouverte : considérer $G = \mathbb{Q}$.
2. Montrer que la composante connexe d'un élément x est xG_0 et que G_0 est stable par conjugaison.
3. Montrer que si H est un sous-groupe ouvert inclus dans G_0, alors $H = G_0$.
4. Montrer que si G est connexe, alors pour tout voisinage V de e, on a $G = G_V$.
5. Montrer que G_0 est ouverte si et seulement s'il existe un voisinage connexe de e.

Exercice 2.6 Connexité et engendrement

1. Dans un espace topologique, soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de parties connexes qui ont un point en commun. Montrer que la réunion des C_i est connexe.
2. Soit G un groupe topologique et soit C une partie connexe contenant le neutre e.
   (a) Vérifier que G_C, le groupe engendré par C, est la réunion des $C_n = \big(C \cup C^{-1}\big)^n$ $(n \in \mathbb{N})$.
   (b) Montrer que si C est connexe, alors G_C est connexe.

3. Soient C_1 et C_2 deux parties connexes de G contenant le neutre e et soit
$$C = \{x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \ : \ x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2\}.$$
Monrer que la fermeture de G_C est connexe.

On fixe un corps $\mathbb{K}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note I_p la matrice identité d'ordre p, $E_{i,j}^{(p)}$ la matrice $p \times p$ dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 et les autres 0. Étant donnée une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, on note W_σ la matrice de l'application linéaire $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^p$, $e_i \mapsto e_{\sigma(j)}$ $(1 \le j \le p)$, où $(e_j)_{1 \le j \le p}$ est la base canonique. On considère par ailleurs les matrices $p \times p$ suivantes (D pour *dilatation*, T pour *transvection*) :

$$\begin{array}{c} 1 \le i \le p, \\ \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha \neq 0 \end{array} \qquad D_{i,\alpha}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{i-1} & & \\ & \alpha & \\ & & \mathrm{I}_{p-i} \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{c} 1 \le i \neq j \le p, \\ \beta \in \mathbb{K} \end{array} \qquad T_{i,j;\beta}^{(p)} = \mathrm{I}_p + \beta\, E_{i,j}^{(p)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \beta & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (\beta \text{ en position } (i,j))$$

Exercice 2.7 Calculs en dimension 2

1. Exprimer P à l'aide de U, V et leurs inverses, où
$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Soient $d_1, d_2 \in \mathbb{K}^*$. Démontrer que les matrices
$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_1 d_2 \end{pmatrix}$$
se déduisent l'une de l'autre par multiplication par des transvections. *Utiliser la question 1.*

Exercice 2.8 Générateurs du groupe linéaire

Soit $\mathscr{X}$ la partie de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ formée des dilatations et des transvections. Soit $\mathscr{Y}$ la partie obtenue en adjoignant à $\mathscr{X}$ les matrices de permutation.

1. Soit $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$. À l'aide de l'algorithme de Gauss, démontrer qu'il existe des matrices inversibles P et Q qui sont des produits d'éléments de $\mathscr{Y}$ et telles que $Q^{-1}AP = \mathrm{I}_p$.
2. En déduire que le groupe linéaire $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ est engendré par $\mathscr{Y}$.
3. À l'aide de l'exercice , démontrer que $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ est engendré par $\mathscr{X}$.

Exercice 2.9 Générateurs du groupe spécial linéaire

Soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des transvections de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$.

1. Soit $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$. En utilisant l'algorithme de Gauss mais sans utiliser les dilatations, démontrer qu'il existe des matrices P et Q, produits d'éléments de $\mathscr{T}$, et des scalaires non nuls $d_1, \ldots, d_n$, tels que $Q^{-1}AP = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_p)$.
2. À l'aide de l'exercice , démontrer qu'il existe des matrices P' et Q', produits d'éléments de $\mathscr{T}$, telles que $Q'^{-1}AP' = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \det A)$.
3. En déduire que le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$ est engendré par $\mathscr{T}$.

Exercice 2.10 Composantes connexes des groupes linéaires

1. Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes.
2. (a) Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ admet au moins deux composantes connexes.
   (b) Démontrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe.
   (c) Montrer enfin que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ admet exactement deux composantes connexes.