Université Lyon 1 – 2020-2021
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche n$^{\text{o}}$ 3

Première partie : topologie quotient

Dans cette partie, on se donne un groupe topologique G séparé dont le neutre est noté e.

Exercice 1 (Topologie quotient)**.** Soit H un sous-groupe de G et soit $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des parties U de G/H telles que $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de G.

1. Pour une partie A de G, qu'est-ce que $\pi^{-1}(\pi(A))$?
2. Vérifier que $\mathscr{T}$ est une topologie sur G/H, que c'est la plus fine qui rend l'application π continue et que l'application π est ouverte.

Exercice 2. Soit G un groupe topologique et soit H un sous-groupe (fermé) de G. On munit le quotient de la topologie éponyme et on note $\pi : G \to G/H$ la projection naturelle.

1. Montrer que l'action de G sur G/H par translations à gauche est continue.
2. Montrer que G/H est discret si et seulement si H est ouvert.
3. Montrer que si H est distingué, alors G/H est un groupe topologique séparé.

Exercice 3. Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $f : X \to Y$ une application continue. On suppose que X est compact et que f est injective. Montrer que f induit un homéomorphisme de X sur $f(X)$.

On pourra donner deux arguments : l'un, dans le cas où les topologies proviennent de distance, en termes de suites extraites ; l'autre dans le cadre général.

Deuxième partie : exemples

Exercice 4 (Un non-homéomorphisme)**.** On munit $\mathbb{R}^*$ de la topologie discrète et $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle. On considère l'action par produit $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, x) \mapsto ax$. Montrer que l'action est continue, puis, pour $x \neq 0$, montrer que $\overline{\phi_x}$ n'est pas un homéomorphisme.

Exercice 5 (La droite et le cercle)**.** Considérons le groupe topologique $G = \mathbb{R}$ et son sous-groupe discret $H = 2\pi\mathbb{Z}$. On munit le quotient G/H de la topologie quotient. Soit $\mathbb{U}$ le groupe des nombres complexes de module 1, muni de la topologie associée au module. Montrer que le morphisme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ induit un homéomorphisme $G/H \to \mathbb{U}$. *Il suffit essentiellement de montrer que f est ouverte.*

Exercice 6. Exhiber un sous-groupe topologique H de $\mathbb{C}^*$ tel que $\mathbb{C}^*/H$ est isomorphe à $\mathbb{U}^2$.

Exercice 7. Soit G le quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. On note $\pi : \mathbb{R}^2 \to G$ la projection naturelle. Pour θ réel, on note $D_\theta = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = \theta x\big\}$. Pour quelles valeurs de θ le sous-groupe $H_\theta = \pi(D_\theta)$ est-il fermé ?

Exercice 8 (Adhérence des matrices de rang donné)**.** Soient m et n entiers, on se place dans $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est, au choix, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit r entier tel que $r \leq \min(m, n)$, on note $\mathscr{O}_r$ l'ensemble des matrices de rang r.

0. Démontrer que le rang d'une matrice est la taille maximale d'un mineur non nul.
1. (a) Démontrer que l'adhérence de $\mathscr{O}_r$ est incluse dans $\bigcup_{s\leq r} \mathscr{O}_s$.
   (b) Soit $s < r$ et soit $A \in \mathscr{O}_s$. Exhiber une suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{O}_r$ qui converge vers A. En déduire que l'adhérence de $\mathscr{O}_r$ est $\bigcup_{s\leq r} \mathscr{O}_s$.
2. (a) Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que $\mathscr{O}_r$ est connexe.
   (b) Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Est-ce que $\mathscr{O}_r$ est connexe ?
   Attention, la réponse dépend au moins de r et pourrait dépendre de m et n.

Exercice 9 (Symétries)**.** Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices $S \in \mathscr{M}$ telles que $S^2 = \mathrm{I}_n$. Considérons les fonctions

$$\rho_\pm : \mathscr{S} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad S \longmapsto \mathrm{rg}(S \pm \mathrm{I}_n).$$

1. Quelle relation y a-t-il entre ρ_+ et ρ_- ?
2. Démontrer que les fibres [1] de ρ_+ et ρ_- sont des parties ouvertes et fermées de $\mathscr{S}$.
3. En faisant agir $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison sur $\mathscr{S}$, démontrer que les fibres de ρ_+ et ρ_- sont des parties connexes.
4. Mêmes questions sur $\mathbb{R}$ à la place de $\mathbb{C}$.

Exercice 10.

1. (Lemme du tube.) Soit A un espace topologique et K un compact. Soit W un ouvert de $A \times K$ qui contient une tranche $A \times \{k\}$ pour un k dans K. Montrer qu'il existe un voisinage V de k dans K tel que $A \times V \subset W$.
2. Soient, dans un groupe topologique G, une partie A fermée et une partie K compacte. Montrer que AK est fermée.

   Pour $c \notin AK$, ce qu'on exprime sous la forme $\{c\} \times K^{-1} \subset \mu^{-1}(G \setminus A)$, exhiber un voisinage de c qui ne rencontre pas AK.
3. Donner un groupe topologique G et deux parties fermées A et B telles que AB ne soit pas fermée.
4. Montrer que si G est un groupe topologique et K un sous-groupe compact, alors la projection $G \to G/K$ est fermée. Montrer que l'hypothèse de compacité est indispensable.

1. Une *fibre* d'une application est l'image réciproque d'un singleton.