Université Lyon 1 – 2020-2021
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche n° 4 : espaces homogènes

Espaces projectifs et variations

Exercice 1 (Espaces projectifs). Soit $\mathbb{K}$ un corps et n un entier non nul. On note $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{K}^n$.

1. (a) Justifier que $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ est naturellement le quotient $\big(\mathbb{K}^n \setminus \{0\}\big)/\mathbb{K}^*$.
   (b) Lorsque $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, définir une topologie raisonnable sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ est connexe.
2. (a) Montrer que l'action naturelle de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ induit une action sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$.
   (b) Déterminer le stabilisateur P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ de la droite $\mathbb{K}e_1$ engendrée par le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
   (c) Démontrer que l'application $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/P \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$, $gP \mapsto \mathbb{K}ge_1$ est un homéomorphisme.
   (d) Démontrer par récurrence que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe pour tout n. Adapter la démonstration pour montrer que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe.
3. Dans cette question, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   (a) On restreint l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ au groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le groupe orthogonal agit transitivement sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$.
   (b) Déterminer le stabilisateur P_r de $\mathbb{K}e_1$ dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$.
   (c) Démontrer que $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ est homéomorphe à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})/P_r$. En déduire que $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ est compact.
   (d) Démontrer par récurrence que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes pour tout n.
   (e) Adapter la construction précédente au cas du corps $\mathbb{C}$ pour montrer que $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ est compact.

Exercice 2 (Grassmanniennes). Dans cet exercice, on désigne par $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $d \in \{1, \dots, n\}$. On note $\mathrm{Gr}_d(E)$ l'ensemble des sous-espaces de E de dimension d (« la grassmannienne des d-plans de E »).

1. Montrer que $\mathrm{Gr}_d(\mathbb{K}^n)$ est naturellement le quotient de l'ensemble $\mathscr{M}_{n,d}^{\mathrm{reg}}(\mathbb{K})$ des matrices $n \times d$ de rang d par le groupe $\mathrm{GL}_d(\mathbb{K})$ agissant par multiplication à droite.
2. (a) Vérifier que le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ opère sur $\mathrm{Gr}_d(E)$ via :
$$\forall g \in \mathrm{GL}(E),\ \forall F \in \mathrm{Gr}_d(E), \quad g \cdot F = g(F).$$
   (b) Montrer que cette action est transitive.
3. (a) Soit $\mathrm{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Décrire matriciellement le stabilisateur du sous-espace F_0 engendré par la famille $(e_1, \dots, e_d)$.
   Aparté : comment l'écrire comme produit semi-direct de groupes classiques ?
   (b) Définir une topologie sur $\mathrm{Gr}_d(E)$ de sorte que l'action précédente soit continue.
4. On munit E d'un produit scalaire eulidien (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou hermitien (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Exhiber un sous-groupe *compact* K de $\mathrm{GL}(E)$ qui agit *transitivement* sur $\mathrm{Gr}_d(E)$. En déduire que la topologie définie à la question précédente fait de $\mathrm{Gr}_d(E)$ un espace compact.
5. Soit F un élément de $\mathrm{Gr}_d(E)$ et soit $(F_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathrm{Gr}_d(E)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) la suite $(F_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers F ;
   (ii) il existe une base $(e_1, \dots, e_d)$ de F et, pour tout n, une base $(e_1^{(p)}, \dots, e_d^{(p)})$ de F_p telles que pour tout i, la suite $(e_i^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers e_i.

Exercice 3 (Drapeaux, version light)**.** On se place dans $\mathbb{R}^3$. On considère l'ensemble $\mathfrak{F}$ des couples (D, F) formé par une droite $D \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathrm{Gr}_1(\mathbb{R}^3)$ et un plan $F \in \mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^3)$ tels que $D \subset F$.

1. Soient D une droite et F un plan de $\mathbb{R}^3$. Soient v un vecteur directeur de D et (w_1, w_2) une base de F. Exprimer la condition $D \subset F$ par l'annulation d'un déterminant.
2. Montrer que $\mathfrak{F}$ est fermé dans le produit $\mathrm{Gr}_1(\mathbb{R}^3) \times \mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 4 (Drapeaux)**.** On reprend les notations précédentes avec, cette fois, deux entiers d et d' tels que $1 \leq d < d' \leq n$. On considère l'ensemble des couples $(F, G) \in \mathrm{Gr}_d(E) \times \mathrm{Gr}_{d'}(E)$ tels que $F \subset G$. On fixe deux sous-espaces $F_0 \in \mathrm{Gr}_d(E)$ et $F_0' \in \mathrm{Gr}_{d'}(E)$ avec $F_0 \subset F_0'$.

1. Montrer que l'ensemble des $(g, h) \in K^2$ tels que $gF_0 \subset hF_0'$ est fermé dans K^2.

   On exprimera la condition d'inclusion par le fait que le rang des matrices obtenues en ajoutant l'une des d premières colonnes de g aux d' premières colonnes de h est d', ce que l'on traduira par des annulations de déterminants.
2. En déduire que l'ensemble $\mathfrak{F}_{d,d'} = \big\{(F, G) \in \mathrm{Gr}_d(E) \times \mathrm{Gr}_{d'}(E),\ F \subset G\big\}$ est fermé.
3. Généraliser : montrer que l'ensemble des suites finies $F_1 \subset \cdots \subset F_r$ de sous-espaces emboîtés de dimensions fixées $d_1 < \cdots < d_r$ est naturellement un espace compact (c'est un fermé dans le produit des grassmanniennes).
4. Donner une autre description de cet ensemble comme espace homogène.

Exercice 5 (Demi-plan de Poincaré)**.** On considère le demi-plan de Poincaré $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{im} z > 0\}$.

1. Vérifier que l'application

$$\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H}, \qquad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) \longrightarrow \frac{az + b}{cz + d}$$

   est bien définie.
2. Montrer que φ est une action continue de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{H}$.
3. Calculer le stabilisateur de i (dont le carré vaut -1...).
4. Démonter que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathfrak{H}$.

Exercice 6 (Structures complexes)**.** Soit N un entier naturel non nul. L'ensemble des *structures complexes* est l'ensemble

$$\mathscr{C}_N = \{J \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R}),\ J^2 + \mathrm{I}_N = 0\}.$$

1. Vérifier que si $\mathscr{C}_N$ n'est pas vide, alors N est pair.

   On pourra regarder la multiplicité des valeurs propres complexes d'un élement de $\mathscr{C}_N$.

Désormais, on suppose que $N = 2n$ est pair.

2. Soit $J \in \mathscr{C}_n$. Montrer que l'addition et le produit externe suivant font de $\mathbb{R}^{2n}$ un espace vectoriel complexe :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall V \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (a + b\mathrm{i}) \cdot V = aV + bJV.$$

3. En déduire que J est semblable à

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

   Écrire l'application linéaire associée à J dans une base construite à partir d'une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n}$.
4. Vérifier que l'action de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ par conjugaison stabilise $\mathscr{C}_{2n}$ et, plus précisément, que $\mathscr{C}_{2n}$ est l'orbite de J_0.
5. Identifier le stabilisateur de J_0 comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
6. Montrer enfin que le quotient est homéomorphe à $\mathscr{C}_{2n}$.