Université Lyon 1 – 2020-2021
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche n° 5

Décomposition de Jordan

Exercice 1. Donner les décompositions de Jordan additive et multiplicative de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Montrer que dans la décomposition de Jordan d'une matrice complexe, disons $A = D + N$, avec D diagonalisable et N nilpotente qui commutent, l'application $F : A \mapsto N$ n'est pas continue. Est-ce que l'application $A \mapsto D$ l'est ?

Noter que l'application F est constante sur l'ensemble des matrices diagonalisables.

Exercice 3. Soit A une matrice carrée complexe, soit $A = D + N$ sa décomposition de Jordan additive. Donner la décomposition de Jordan multiplicative de l'exponentielle $\exp(A)$.

Exercice 4. Soit A une matrice complexe carrée. On note

$$\varphi_A : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad M \longmapsto AM - MA.$$

1. Montrer que si A est diagonalisable, l'endomorphisme φ_A l'est aussi.
   Dans le cas d'une matrice diagonale, exhiber une base propre. Ramener le cas général à ce cas.
2. Montrer que si A est nilpotente, l'endomorphisme φ_A l'est aussi.
   On calcule φ_A^k en remarquant que φ_A est la somme de deux endomorphismes nilpotents qui commutent : la multiplication à gauche par A et la multiplication à droite par $-A$.
3. En déduire la décomposition de Jordan de φ_A dans $\mathrm{End}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\big)$.

Exercice 5 (Semi-simplicité)**.**

1. Vérifier que dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice est semi-simple si et seulement si elle est diagonalisable.
2. Montrer que pour matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) A est semi-simple (*i.e.* son polynôme minimal est séparable, *i.e.* à racines simples dans $\mathbb{C}$) ;
   (b) tout sous-espace F de $\mathbb{R}^n$ stable par A admet un supplémentaire stable.
   (a)⇒(b) : Commencer par le cas où le polynôme minimal μ_A est irréductible : montrer qu'alors $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{L} = \mathbb{R}[X]/(\mu_A)$ et que les sous-espaces stables par A sont les $\mathbb{L}$-sous-espaces vectoriels.
   Traiter ensuite le cas général par à l'aide du lemme des noyaux.
   (b)⇒(a) : Montrer plutôt que si le polynôme minimal μ_A est divisible par le carré d'un polynôme f, alors $\ker f(A)$ est stable mais n'admet pas n'admet pas de supplémentaire stable.