Université Lyon 1 – 2021-2022
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche n°6 : matrices nilpotentes

Pour un entier $n \geq 1$, on note J_n la matrice nilpotente $n \times n$ donnée par

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice J_1 est la matrice (0). On dit qu'une matrice est *sous forme de Jordan* si elle est diagonale par bloc de la forme

$$\begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_{n_k} \end{pmatrix}$$

On peut démontrer que tout matrice nilpotente est semblable à une matrice qui est sous forme de Jordan.

Exercice 1 (Manipulations)**.**

1. Parmi les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

   y en a-t-il deux semblables ?
2. Combien de classes de similitude de matrices 6×6 nilpotentes ?
3. Pour n entier non nul, calculer l'inverse de la matrice de taille $n \times n$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ & \ddots & \ddots & & n-1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & (0) & & \ddots & 2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit $\mathbb{K}$ un corps, soit n un entier naturel et soit $\mathbb{K}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus n sur $\mathbb{K}$. Vérifier que les endomorphismes suivants sont nilpotents et donner une base pour chacun dans laquelle leur matrice est sous forme de Jordan :

$$\begin{aligned} D : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P &\longmapsto P' \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \Delta : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P &\longmapsto P(X+1) - P(X). \end{aligned}$$

Exercice 3 (Le bloc de Jordan indécomposable est générique)**.**

1. Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ et, pour ε complexe non nul, soit D_ε la matrice diagonale qui a k coefficients diagonaux égaux à 1 suivis de $n-k$ coefficients égaux à ε. Calculer $D_\varepsilon^{-1} J_n D_\varepsilon$.
2. Démontrer que l'adhérence de l'orbite de J_n est l'ensemble des matrices nilpotentes.

Exercice 4. Soient p et q deux entiers tels que $p \geq q \geq 1$ et soit $n = p + q$. Soient

$$A = \begin{pmatrix} J_{p+1} & 0 \\ 0 & J_{q-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} J_p & 0 \\ 0 & J_q \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que pour $\varepsilon \neq 0$, la matrice $B + \varepsilon E_{n,p}$ est semblable à A.
   Partir de e_1 et $e_{p+1} + \varepsilon A^{p-q} e_{p-1}$.
2. En déduire que la matrice B est dans l'adhérence de la classe de similitude de A.

Exercice 5 (Commutant d'un bloc de Jordan)**.** Soit A une matrice qui commute à J_n. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

1. Remarquer que $J_n^k e_1 = e_{k+1}$ pour k de 0 à $n-1$. En déduire que Ae_1 peut s'écrire $P(J_n)e_1$ pour un polynôme P convenable de degré inférieur ou égal à $n-1$.
2. Montrer que $Ae_i = P(J_n)e_i$ pour tout i.
3. Montrer que le commutant de J_n est égal au sous-espace des polynômes en cette matrice.
4. Combien y a-t-il de matrices nilpotentes et de rang $n-1$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{F}_q)$?