Université Lyon 1 – 2021-2022
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche n°7 : Matrices symétriques

Première partie : autour du théorème spectral

Considérons les deux théorèmes suivants

Théorème d'orthonormalisation simultanée. Si q est une forme quadratique sur un espace euclidien, il existe une base orthonormale qui est orthogonale pour q.

Théorème spectral, version endomorphisme. Si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien, il existe une base orthonormale qui diagonalise u.

Théorème spectral, version matrice. Si $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, il existe une matrice orthogonale $O \in O(n, \mathbb{R})$ telle que $O^{-1}MO$ est diagonale.

Exercice 1. Montrer l'équivalence entre les trois théorèmes.

Les deux exercices suivants donnent une preuve du théorème spectral.

Exercice 2. Compléter les ébauches de preuve du lemme suivant : tout endomorphisme symétrique u d'un espace euclidien E admet une valeur propre (réelle).

1. (Première preuve.) Soit S la sphère unité de E et x_0 un point où la fonction $f : x \mapsto \langle x, u(x) \rangle$ est maximale. Si $z \in S$ est orthogonal à x, en écrivant que $f(\cos(\theta)x + \sin(\theta)z) \leqslant f(x)$ avec $\theta \to 0$, on obtient que z est orthogonal à $u(x)$. Il s'ensuit que x est un vecteur propre de u.
2. (Seconde preuve.) L'endomorphisme u une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit x un vecteur propre correspondant. On calcule que $\overline{\lambda} x^\mathsf{T} x = \lambda x^\mathsf{T} x$, donc λ est réel.

Exercice 3. A l'aide du lemme donné par l'exercice précédent, démontrer le théorème spectral par récurrence sur la dimension.

Exercice 4. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les deux énoncés suivants.

1. les valeurs propres de A sont $\geqslant 0$,
2. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x^\mathsf{T} A x \geqslant 0$.

Exercice 5. On munit l'espace vectoriel $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ d'une norme arbitraire. Montrer que l'intérieur de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ coïncide avec $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 6. (Formules du minimax) Pour $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(A) \geqslant \lambda_2(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A)$ ses valeurs propres rangées dans l'ordre décroissant.

1. Montrer les formules suivantes : pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\lambda_k(A) = \min_{F \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)} \max_{x \in F, \|x\|=1} \langle Ax, x \rangle = \max_{F \in \mathrm{Gr}_{n-k+1}(\mathbb{R}^n)} \min_{x \in F, \|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$$

2. Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction λ_k est continue sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Deuxième partie : décomposition polaire

On rappelle la décomposition polaire vue en cours : toute matrice $A \in GL(n, \mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme $A = OS$ avec $O \in O(n, \mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 7. A-t-on un résultat analogue en demandant que $A = SO$?

Exercice 8. Soit $w = a + bi$ un nombre complexe non nul (où $a, b \in \mathbb{R}$). Écrire la décomposition polaire de l'application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ correspondant à la multiplication par w quand on identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 9 (maximalité du groupe orthogonal)**.** À l'aide de la décomposition polaire, montrer que le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ est maximal parmi les sous-groupes compacts de $GL(n, \mathbb{R})$.

Exercice 10 (décomposition polaire pour une matrice non inversible)**.** Soit A une matrice carrée réelle. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale O et une matrice symétrique S semi-définie positive telles que $A = OS$. Une telle décomposition est-elle unique ?

Exercice 11 (décomposition polaire dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)**.** Mimer la démonstration de la décomposition polaire dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour montrer que l'application suivante est un homéomorphisme :

$$U_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad (U, H) \mapsto UH,$$

où $U_n(\mathbb{C})$ est le groupe unitaire et $\mathscr{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ est le cône des matrices hermitiennes définies positives.

Exercice 12 (La matrice orthogonale la plus proche de chez vous !)**.**

On considère l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|M\|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{ij}^2 \quad \text{pour } M = (m_{ij}).$$

Soit A une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = OS$ une décomposition polaire. Montrer que l'infimum

$$\inf_{U \in O(n,\mathbb{R})} \|U - A\|$$

est atteint lorsque $U = O$.

Exercice 13. Montrer, en utilisant la décomposition polaire, que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice orthogonale.