Université Lyon 1 – 2021-2022
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche n°8 : Compléments

On se donne deux entiers p et q, on note n leur somme. On s'intéresse à la forme quadratique

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

On note $\mathrm{I}_{p,q}$ sa matrice dans la base canonique : elle est diagonale et formée de deux blocs diagonaux I_p et $-\mathrm{I}_q$. On note $\mathrm{O}(p,q)$ le groupe orthogonal de la forme Q – si $q = 0$, on abrège $\mathrm{O}(p) = \mathrm{O}(p,0)$.

Exercice 1. Décrire à la main les groupes $\mathrm{O}(2)$ et $\mathrm{O}(1,1)$ ainsi que leur intersection et les composantes connexes de chacun d'eux.

Exercice 2. Montrer que la fonction $M \mapsto \exp(M)$ réalise un homéomorphisme de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Exercice 3. Étude du groupe $O(p,q)$

1. Soit M un élément de $\mathrm{O}(p,q)$. On écrit $M = OS$ la décomposition polaire de M, où $O \in \mathrm{O}(n)$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $T = M^{\mathsf{T}}M$.
   (a) Vérifier que T appartient à $\mathrm{O}(p,q)$.
   (b) Montrer qu'il existe une unique matrice $U \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $U^2 = T$. Montrer de plus que $U \in O(p,q)$.
   (c) En déduire que S, puis O appartiennent à $\mathrm{O}(p,q)$.
2. On suppose que M appartient à $\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}(n)$. Démontrer que M est diagonale par blocs et que ses blocs diagonaux appartiennent respectivement à $\mathrm{O}(p)$ et $\mathrm{O}(q)$.
3. Montrer que la fonction exponentielle réalise une bijection de
$$\{B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})\,;\, BI_{p,q} = -I_{p,q}B\}$$
sur $O(p,q) \cap \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Démontrer enfin que $\mathrm{O}(p,q)$ est homéomorphe à $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$. En déduire le nombre de composantes connexes de $\mathrm{O}(p,q)$.

Exercice 4 (réalisation matricielles des isométries de $\mathbb{R}^n$)**.** Dans $\mathbb{R}^{n+1}$ vectoriel euclidien standard, on remarque que le sous-espace affine $H = \big\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_{n+1} = 1\big\}$ est isométrique à $\mathbb{R}^n$.

1. Expliciter une isométrie $\mathbb{R}^n \to H$.
2. Décrire le stabilisateur de H dans $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$.
3. Dans ce stabilisateur, montrer que les isométries sont les matrices de la forme
$$\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ v \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad [0 \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R}),\ 1 \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})].$$

L'exercice suivant est une continuation de l'exercice 5 de la feuille 4, où l'on a considéré l'action de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathfrak{H}$.

Exercice 5 (décomposition d'Iwasawa dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, version géométrique)**.**
Dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, soient $D^{>0} = \left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix},\ \lambda > 0\right\}$, $U = \left\{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ et $B^{>0} = UD^{>0}$.

1. Déterminer les orbites de $D^{>0}$ et les orbites de U pour cette action.
2. Vérifier que l'action de $B^{>0}$ est simplement transitive ($\forall z \in \mathfrak{H}, \exists! b \in B^{>0},\ b \cdot \mathrm{i} = z$).
3. En déduire que l'application $U \times D^{>0} \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $(u,d,c) \mapsto udc$ est un homéomorphisme.