Université Claude Bernard Mathématiques
M2 Convexité en grande dimension et théorie quantique de l'information

Examen final : corrigé succinct

Exercice 1

Comme $t_1P_1+\cdots+t_kP_k$ contient un cube de côté 10^{-3}, on a une minoration de sa largeur moyenne :

$$w(t_1P_1+\cdots+t_kP_k) \geqslant w(x+[0,10^{-3}]^n).$$

La largeur moyenne est 1-homogène et invariante par translation, donc

$$w(x+[0,10^{-3}]^n) = \frac{10^{-3}}{2}w([-1,1]^n).$$

La largeur moyenne de B_∞^n se calcule via les gaussiennes (G est un vecteur aléatoire de loi γ_n) et vaut

$$w([-1,1]^n) = \frac{1}{\beta_n}\mathbf{E}\|G\|_1 \sim c\sqrt{n}.$$

Par ailleurs, $w(t_1P_1+\cdots+t_kP_k) = t_1w(P_1)+\cdots+t_kw(P_k) \leqslant \max w(P_i)$, donc il existe i tel que

$$w(P_i) \geqslant c'\sqrt{n}.$$

Enfin, si N est le nombre de sommets de P_i, on peut majorer

$$w(P_i) = \frac{1}{\beta_n}\mathbf{E}\max_{v \text{ sommet de } P_i}\langle v, G\rangle.$$

La variance de $\langle v,G\rangle$ vaut $\|v\|_2=\sqrt{n}$. L'espérance du maximum de N gaussiennes de variance $\sqrt{n}$ est majoré par $C\sqrt{n}\sqrt{\log N}$, et donc

$$w(P_i) \leqslant C\sqrt{\log N}.$$

On en déduit $N \geqslant \exp(C'n)$ pour une constante C'.

Exercice 2

1. Comme $|x\rangle\langle x|$ est un état pur, il est séparable si et seulement si il est de la forme $|u\rangle\langle u| \otimes |v\rangle\langle u|$ pour $u,v \in \mathbf{C}^d$. Autrement dit, $|x\rangle\langle x|$ est séparable si et seulement si x est un tenseur pur, i.e. si et seulement si $\lambda_{\max}(x)=1$.
2. La décomposition de Schmidt correspond à la décomposition en valeurs singulières si on interprète x comme une matrice. Ainsi le plus grand coefficient de Schmidt correspond au carré de la plus grande valeur singulière, c'est-à-dire à la normed'opérateur. La norme d'opérateur d'une matrice A est

$$\|A\|_{op} = \max_{u\in\mathbf{C}^d,\|u\|_2=1}\|Au\|_2 = \max_{u,v\in\mathbf{C}^d,\|u\|_2=\|v\|_2=1}|\langle Au,v\rangle| = \max_{u,v\in\mathbf{C}^d,\|u\|_2=\|v\|_2=1}|\operatorname{tr} A|u\rangle\langle v||.$$

Exercice 3

On note $H=\mathbf{C}^d\otimes\mathbf{C}^d$, et $T:\mathscr{M}(\mathbf{C}^d)\to\mathscr{M}(\mathbf{C}^d)$ l'application de transposition $T(A)=A^t$ (attention : c'est bien la transposition et non la transconjugaison), et $T_1 = T\otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{M}(\mathbf{C}^d)} : \mathscr{M}(H)\to\mathscr{M}(H)$ la transposition partielle.

1. Si ρ est séparable, il s'écrit comme une combinaison convexe d'états produits. La transposition partielle d'un état produit est encore un état, car $T_1(\rho_1\otimes\rho_2)=\rho_1^t\otimes\rho_2$, donc $T_1(\rho)$ est aussi un état.

2. On calcule la transposition partielle de $\rho = t\frac{\mathrm{Id}}{4} + (1-t)|x\rangle\langle x$. La matrice de ρ est

$$\begin{bmatrix} t/4+(1-t)/2 & 0 & 0 & (1-t)/2 \\ 0 & t/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t/4 & 0 \\ (1-t)/2 & 0 & 0 & (1-t)/2+t/4 \end{bmatrix}.$$

Pour obtenir la matrice de $T_1(\rho)$ on transpose chaque bloc 2×2

$$\begin{bmatrix} t/4+(1-t)/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t/4 & (1-t)/2 & 0 \\ 0 & (1-t)/2 & t/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-t)/2+t/4 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est positive si et seulement si le bloc central 2×2 l'est, i.e. $t \geqslant 2/3$. Par la question 1, ρ est donc intriqué lorsque $t < 2/3$.

Exercice 4

1. Supposons le lemme montré lorsque B est diagonale à coefficients réels positifs. Soit A, B, C quelconques vérifiant l'hypothèse du lemme ; par la décomposition en valeurs singulières, il existe des matrices unitaires U, V telles que UBV^* soit diagonale positive. On écrit alors

$$\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U^* & 0 \\ 0 & V^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} UAU^* & UBV^* \\ VB^*U^* & VCV^* \end{bmatrix}$$

La matrice de droite est positive (on a conjugué une matrice positive par une matrice unitaire), donc par le lemme (cas « B diagonal »), on a $\|UBV^*\|_p^2 \leqslant \|UAU^*\|_p \cdot \|VCV^*\|_p$. Mais la norme $\|.\|_p$ est invariante par multiplication par un unitaire, donc $\|B\|_p^2 \leqslant \|A\|_p \|C\|_p$.

2. La matrice $\begin{bmatrix} a_{ii} & b_i \\ b_i & c_{ii} \end{bmatrix}$ est une sous-matrice de la matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$, donc elle est positive et son déterminant aussi.

3. On a

$$\|B\|_p^p = \sum_i b_i^p \leqslant \sum_i a_{ii}^{p/2} c_{ii}^{p/2} \leqslant \left(\sum_i a_{ii}^p\right)^{1/2} \left(\sum_i c_{ii}^p\right)^{1/2}$$

par l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Pour finir, $\mathrm{diag}(A) \prec \mathrm{sp}(A)$ pour une matrice auto-adjointe A, d'où on tire que $\left(\sum |a_{ii}|^p\right)^{1/p} \leqslant \|A\|_p$, et la preuve du lemme.

4. Par la décomposition en valeurs singulières,

$$\{A \in \mathscr{M}(\mathbf{C}^d), \|A\|_1 \leqslant 1\} = \mathrm{conv}\{\pm|x\rangle\langle y|; \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1\}.$$

Par le théorème spectral,

$$\{A \in \mathscr{M}_{sa}(\mathbf{C}^d), \|A\|_1 \leqslant 1\} = \mathrm{conv}\{\pm|x\rangle\langle x|; \|x\|_2 = 1\}.$$

On en déduit le résultat (la fonction convexe $\|\cdot\|_p$ atteignant son maximum sur un point extrémal).

5. La matrice $|u\rangle\langle u|$ s'écrit par blocs comme $M = \begin{bmatrix} |x\rangle\langle x| & |y\rangle\langle x| \\ |x\rangle\langle y| & |y\rangle\langle y| \end{bmatrix}$. Cette matrice est positive, donc $(\Phi \otimes \mathrm{Id})(M)$ aussi, et donc

$$\begin{bmatrix} \Phi(|x\rangle\langle x|) & \Phi(|y\rangle\langle x|) \\ \Phi(|x\rangle\langle y|) & \Phi(|y\rangle\langle y|) \end{bmatrix} \geqslant 0$$

Le lemme implique que

$$\|\Phi(|x\rangle\langle y|)\|_p^2 \leqslant \|\Phi(|x\rangle\langle x|)\|_p \|\Phi(|y\rangle\langle y|)\|_p \leqslant \left(\|\Phi\|_{1\to p}^{sa}\right)^2.$$

On en déduit donc $\|\Phi\|_{1\to p} \leqslant \|\Phi\|_{1\to p}^{sa}$. L'autre inégalité est évidente.

Exercice 5

1. Soit $\{p_i, \rho_i\}_i$ un ensemble admissible. On décompose chaque état ρ_i comme combinaison convexe d'états purs : $\rho_i = \sum_j p_{ij}\rho_{ij}$. Alors $\{p_i p_{ij}, \rho_{ij}\}_{i,j}$ est un ensemble admissible pour lequel la quantité à maximiser est plus grande que pour $\{p_i, \rho_i\}_i$: le premier terme est inchangé et le terme précédé du signe $-$ a diminué par concavité de l'entropie.
2. Soit $\{p_i, \rho_i\}_i$ un ensemble admissible, avec $p_i > 0$ et au moins d^2+1 éléments. Comme la dimension de l'ensemble des états est d^2-1 (c'est de codimension 1 dans $\mathscr{M}_{sa}(\mathbf{C}^d)$), il existe une liaison affine entre les p_i : il existe q_i avec $\sum q_i = 0$ et $\sum q_i\rho_i = 0$. L'ensemble $\{p_i + tq_i, \rho_i\}_i$ est admissible lorsque $p_i + tq_i \geqslant 0$. De plus, la fonction
$$t \mapsto S\left(\Phi\left(\sum_i (p_i + tq_i)\rho_i\right)\right) - \sum_i (p_i + tq_i) S(\Phi(\rho_i))$$
est affine (le premier terme ne dépend pas de t) et donc maximale au bord de l'ensemble des t admissibles. Mais pour un tel t_0, $p_i + t_0 q_i = 0$ pour un certain i.
Ainsi on a diminué de 1 la longueur de l'ensemble $\{p_i, \rho_i\}_i$. En itérant ce processus, on construit un ensemble admissible de longueur d^2 pour lequel la quantité à maximiser est supérieure ou égale à ce qu'elle valait pour $\{p_i, \rho_i\}_i$.