Université Claude Bernard Mathématiques
M2 Convexité en grande dimension et théorie quantique de l'information

Corrigé de l'examen partiel

Exercice 1

1. On a vu en cours que pour $\varepsilon \leqslant 1$, la sphère S^{n-1} admet un ε-réseau de cardinal inférieur à $(3/\varepsilon)^n$. Donc S^{n-1} est recouverte par $(3/\varepsilon)^n$ calottes de rayon ε. Toutes ces calottes ont même mesure, et comme $\sigma(S^{n-1}) = 1$, on en déduit que la mesure d'une de ces calottes est supérieure à $(\varepsilon/3)^n$.
2. (a) Par Fubini,

$$\int_{\mathcal{O}(n)} \int_{S^{n-1}} \left(\frac{1}{\|U(\theta)\|_K \|\theta\|_K} \right)^n d\sigma(\theta) d\mu(U) = \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|\theta\|_K^n} \left(\int_{\mathcal{O}(n)} \frac{1}{\|U(\theta)\|_K^n} d\mu(U) \right) d\sigma(\theta).$$

Pour chaque $\theta \in S^{n-1}$ et $U \in \mathcal{O}(n)$ distribué selon μ, la loi de $U(\theta)$ est invariante par rotation (cela découle de l'invariance de la mesure de Haar) et c'est donc σ. Donc l'intégrale intérieure ne dépend pas de θ et vaut $\int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|x\|_K^n} d\sigma(x) = A^n$. Le résultat en découle.

(b) Comme une moyenne est supérieure au minimum, il découle de la question précédente qu'il existe $U_0 \in \mathcal{O}(n)$ tel que $\int_{S^{n-1}} \left(\frac{1}{\|U_0(\theta)\|_K \|\theta\|_K} \right)^n d\sigma(\theta) \leqslant A^{2n}$.
L'inégalité arithmético-géométrique $\sqrt{\|U_0(\theta)\|_K \cdot \|\theta\|_K} \leqslant N(\theta)$ implique le résultat voulu.

(c) Comme $B_2^n \subset K$, $\|\cdot\|_K \leqslant \|\cdot\|_2$ et donc $\|\cdot\|_K$ est 1-Lipschitzienne. Comme U_0 est une isométrie, N est aussi 1-Lipschitzienne. Si $N(x) \leqslant t$, et $y \in C(x,t)$, alors

$$N(y) \leqslant N(x) + N(y-x) \leqslant N(x) + \|y-x\|_2 \leqslant 2t.$$

(d) Supposons que $N(x) = t$. Alors par la question (c), $N \leqslant 2t$ sur une calotte C de rayon t. La question 1. minore la mesure de cette calotte par $(t/3)^n$. On en déduit

$$A^{2n} \geqslant \int_{S^{n-1}} \frac{1}{N(\theta)^{2n}} d\sigma(\theta) \geqslant \sigma(C). \frac{1}{(2t)^{2n}} \geqslant \frac{1}{(12t)^n}$$

et donc $t \geqslant 1/12A^2$. Ainsi $N(x) \geqslant 1/12A^2$ pour tout $x \in S^{n-1}$.
On a

$$N(x) \leqslant \max\left(\|x\|_K, \|U_0 x\|_K\right) = \max\left(\|x\|_K, \|x\|_{U_0^{-1}(K)}\right) = \|x\|_{K \cap U_0^{-1}(K)}$$

On en déduit donc que $\forall x \in \mathbf{R}^n$,

$$\|x\|_{K \cap U_0^{-1}(K)} \geqslant \frac{1}{12A^2} \|x\|_2$$

ce qui est équivalent à $K \cap U_0^{-1}(K) \subset 12A^2 \cdot B_2^n$, ou encore $U_0(K) \cap K \subset 12A^2 \cdot B_2^n$.
L'autre inclusion est facile : on a $B_2^n \subset K$ et donc $B_2^n = U_0(B_2^n) \subset U_0(K)$.

3. On veut appliquer le résultat de la question 2. à $K = \sqrt{n} B_1^n$. On a vu en cours que $\mathrm{vol}(B_1^n) = 2^n/n!$, alors que $\mathrm{vol}(B_2^n) \geqslant \mathrm{vol}(\frac{1}{\sqrt{n}} B_\infty^n) = 2^n/n^{n/2}$. Si on pose $A = (\mathrm{vol}(\sqrt{n} B_1^n)/\mathrm{vol}(B_2^n))^{1/n}$, on en déduit que $A \leqslant n/(n!)^{1/n} \leqslant e$.
On en déduit ainsi le résultat voulu avec $C = 12e^2$.
Remarque : on ne connaît pas d'exemple explicite de rotation ayant cette propriété.
4. Non. Le cube B_∞^n est l'intersection de $2n$ demi-espaces (autrement dit : il a $2n$ faces) et il en est de même de $V(B_\infty^n)$ pour toute rotation V. Par conséquent, $B_\infty^n \cap V(B_\infty^n)$ a au plus $4n$ faces. Or on a vu en cours qu'un convexe à distance de Banach–Mazur bornée de B_2^n devait nécessairement avoir un nombre de faces exponentiellement grand en la dimension.

Exercice 2

On considère $K = \sqrt{n}B_1^n$. Alors $K \supset B_2^n$, et donc par le théorème de Dvoretzky–Milman, un sous-espace E aléatoire de dimension $k \leqslant c(\varepsilon)nM^2$ vérifie $d_{BM}(K \cap E, B_2^k) \leqslant 1+\varepsilon$, où $M = \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_K d\sigma(\theta)$. Ici $K = \sqrt{n}B_1^n$, donc

$$M = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_1 d\sigma(\theta).$$

Cette intégrale a été calculée en cours (il suffit de passer en gaussiennes) et on en déduit que M est minoré par c_0, une constante indépendante de n. Ainsi (pour ε=1), il est possible de prendre $k = \lfloor c(1)c_0^2 n \rfloor$ dans le théorème de Dvoretzky–Milman, et on obtient un sous-espace E de dimension k vérifiant $d_{BM}(\sqrt{n}B_1^n \cap E, B_2^k) \leqslant 2$, et donc $d_{BM}(B_1^n \cap E, B_2^k) \leqslant 2$