Feuille d'exercices numéro 1

Notions de bases sur les corps convexes. Inégalité de Brunn-Minkowski.

Exercice 1 (**Hahn–Banach en dimension finie.**) Montrer que si K et L sont deux convexes compacts disjoints de $\mathbf{R}^n$, il existe $x \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$\sup_{y \in K} \langle x|y \rangle < \inf_{z \in L} \langle x|z \rangle.$$

Il est hors de question d'utiliser l'axiome du choix.

Exercice 2 (**Bipolaire.**) Si K est un corps convexe symétrique, montrer que $K = K^{\circ\circ}$. Que se passe-t-il si l'on ne suppose plus K symétrique ?

Exercice 3 (**Fonction d'appui.**) Si $K \subset \mathbf{R}^n$ est un corps convexe, on définit sa fonction d'appui $h_K : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ par $h_K(x) = \sup_{y \in K} \langle x|y \rangle$. Montrer que si K et L sont deux corps convexes, on a les équivalences

$$K \subset L \iff h_K \leqslant h_L,$$
$$K \subset \operatorname{int} L \iff h_K < h_L.$$

Qu'est-ce que h_{K° ?

Exercice 4 (**Dualité section-projection.**) Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ un corps convexe symétrique, et $E \subset \mathbf{R}^n$ un sous-espace. Montrer les formules

$$(E \cap K)^\circ = P_E(K^\circ) \qquad\qquad (P_E K)^\circ = E \cap K^\circ.$$

Dans le membre de gauche de chaque égalité, le polaire est pris dans l'espace E (muni du produit scalaire induit).

Exercice 5 (**Sections parallèles d'un corps convexe symétrique.**) Soit K un corps convexe symétrique et E un sous-espace de dimension k ; montrer que parmi toutes les sections de K parallèles à E, c'est celle qui passe par l'origine qui a le plus grand volume k-dimensionnel.

Exercice 6 (**Symétrisation de Schwarz.**) Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ un corps convexe, et $u \in S^{n-1}$. On note $H = u^\perp$ l'hyperplan orthogonal à u. On définit $S_u K$, le symétrisé de Schwarz de K dans la direction u, en définissant son intersection avec chaque hyperplan affine de la famille $\{H + tu\}_{t \in \mathbf{R}}$ de la manière suivante

- $S_u K \cap (H + tu) = \emptyset$ lorsque $K \cap (H + tu) = \emptyset$.
- Sinon, $S_u K \cap (H + tu)$ est la boule euclidienne (dans $H + tu$) de centre tu et de rayon choisi tel que $\mathrm{vol}_{n-1}(S_u K \cap (H + tu)) = \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap (H + tu))$.

Montrer les propriétés suivantes

1. $\mathrm{vol}(K) = \mathrm{vol}(S_u K)$.
2. $S_u K$ est un corps convexe.
3. $(S_u K)_\varepsilon \subset S_u(K_\varepsilon)$ pour tout ε, et donc $a(S_u K) \leqslant a(K)$.
4. Si $\mathcal{E}$ est un ellipsoïde, $S_u \mathcal{E}$ est aussi un ellipsoïde.

Exercice 7 Soit K et L deux corps convexes de $\mathbf{R}^n$. Montrer que la fonction

$$g(x) = \mathrm{vol}(K \cap (L + x))^{1/n}$$

est concave sur $K - L$.

Exercice 8 (**Inégalité de Anderson.**) Soit γ_n la mesure gaussienne usuelle sur $\mathbf{R}^n$. Montrer que pour tout corps convexe symétrique $K \subset \mathbf{R}^n$ et tout vecteur $x \in \mathbf{R}^n$, on a

$$\gamma_n(K + x) \leqslant \gamma_n(K).$$