Feuille d'exercices numéro 2
Ellipsoïdes. Théorème de John. Distance de Banach–Mazur.

Exercice 1 (**Stabilité des ellipsoïdes.**) Soit $\mathcal{E} \subset \mathbf{R}^n$ un ellipsoïde. Montrer que le polaire de $\mathcal{E}$ est un ellipsoïde, et que si $F \subset \mathbf{R}^n$ est un sous-espace vectoriel, alors la section $\mathcal{E} \cap F$ et la projection $P_F\mathcal{E}$ sont des ellipsoïdes (dans F). Montrer aussi que le symétrisé de Schwarz $S_u\mathcal{E}$ est un ellipsoïde.

Exercice 2 Soient K et L deux corps convexes symétriques de $\mathbf{R}^n$ vérifiant $d_{BM}(K, L) = 1$. Montrer qu'il existe une application linéaire inversible T telle que $K = TL$.

Exercice 3 (**Théorème de John dual**). Soit K un corps convexe symétrique. Montrer qu'il existe un unique ellipsoïde de volume minimal parmi tous les ellipsoïdes contenant K (on le note $\mathcal{E}_L(K)$ et on l'appelle ellipsoïde de Löwner). Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{E}_L(K) = B_2^n$ complètement analogue à celle du théorème de John.

Indication : appliquer le théorème de John à K°.

Exercice 4 (**Hexagone**). Soit $K \subset \mathbf{R}^2$ un hexagone régulier centré en 0. Calculer (ou à défaut, encadrer) $d_{BM}(K, B_2^2)$ et $d_{BM}(K, B_2^\infty)$.

Exercice 5 (**Deux sections hyperplanes d'un même corps convexe ne sont pas trop différentes**). Soit K un corps convexe symétrique de $\mathbf{R}^n$, H_1 et H_2 deux hyperplans de $\mathbf{R}^n$ passant par l'origine. Montrer que $d_{BM}(K \cap H_1, K \cap H_2) \leqslant C$, où C est une constante universelle. Remarque : pour définir la distance, on identifie — de manière arbitraire — H_1 à H_2.

Exercice 6 (**Une caractérisation des ellipsoïdes**). Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'elle dérive d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme : pour tous $x, y \in \mathbf{R}^n$,

$$\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

En déduire le résultat suivant : un corps convexe symétrique $K \subset \mathbf{R}^n$ est un ellipsoïde si et seulement si toutes ses sections par des sous-espaces vectoriels de dimension 2 sont des ellipses. Cet énoncé reste-t-il vrai si on replace “section” par “projection” ?

Exercice 7 (**Lemme de Auerbach**). Dans cet exercice, on appelle “cocube” l'image de B_1^n par une application linéaire inversible. Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ un corps convexe symétrique. Montrer qu'il existe un cocube de volume maximal parmi ceux inclus dans K. Est-il unique ?

Quitte à appliquer une transformation linéaire on peut supposer que B_1^n est un cocube de volume maximal parmi ceux inclus dans K. Montrer qu'alors $K \subset B_\infty^n$. En déduire une preuve du fait que (BM_n, d_{BM}) est compact qui ne fasse pas appel au théorème de John.

Exercice 8 (**Cube vs octaèdre**). Essayez d'estimer l'ordre de grandeur de la quantité $d_{BM}(B_1^n, B_\infty^n)$.