Feuille d'exercices numéro 3

Exercice 1 (**Lemme de Auerbach**). Dans cet exercice, on appelle "cocube" l'image de B_1^n par une application linéaire inversible. Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ un corps convexe symétrique. Montrer qu'il existe un cocube de volume maximal parmi ceux inclus dans K. Est-il unique ?

Quitte à appliquer une transformation linéaire on peut supposer que B_1^n est un cocube de volume maximal parmi ceux inclus dans K. Montrer qu'alors $K \subset B_\infty^n$. En déduire une preuve du fait que (BM_n, d_{BM}) est compact qui ne fasse pas appel au théorème de John.

Exercice 2 (**Cube vs octaèdre**). Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout n, $d_{BM}(B_1^n, B_\infty^n) \leqslant C\sqrt{n}$ (on pourra utiliser le fait que $d_{BM}(B_1^{2^k}, B_\infty^{2^k}) \leqslant 2^{k/2}$ et considérer la plus grande puissance de 2 inférieure à n).

Exercice 3 (**Matrices de Hadamard**). Soit M une matrice orthogonale $n \times n$ dont tous les coefficients valent $\pm 1/\sqrt{n}$. Montrer que $n = 1$ ou $n = 2$ ou n est un multiple de 4 (la réciproque est un problème ouvert). Vous pouvez essayer de construire une telle matrice en dimension 12.

Exercice 4 (**Produit tensoriel de matrices**). Si A et B sont deux matrices auto-adjointes (resp. positives, orthogonales, unitaires), en est-il de même pour $A \otimes B$? Calculer la trace et le déterminant de $A \otimes B$.

Exercice 5 (**Concentration de la mesure autour de la moyenne**). Soit $f : S^{n-1} \to \mathbf{R}$ une fonction 1-Lipschitzienne et $\bar{f} = \int_{S^{n-1}} f d\sigma$ sa moyenne. Montrer qu'il existe des constantes universelles C, c telles que pour tout $t > 0$,

$$\sigma\left\{x \in S^{n-1} \text{ t.q. } |f(x) - \bar{f}| > t\right\} \leqslant C \exp(-cnt^2)$$

La différence avec l'énoncé du cours est que la médiane est remplacée par la moyenne. Montrer que réciproquement, l'énoncé sur la moyenne implique formellement l'énoncé sur la médiane.

Exercice 6 (**Enveloppe convexe d'un ε-réseau**). Soit $\mathscr{N} \subset S^{n-1}$, $K = \operatorname{conv} \mathscr{N}$ et $\varepsilon < 1$. Montrer que $\mathscr{N}$ est un ε-réseau de S^{n-1} si et seulement si $(1 - \varepsilon^2/2)B_2^n \subset K$.