Feuille d'exercices numéro 4
Théorème de Dvoretzky.

Exercice 1 (Octaèdre comme section du cube). Montrer qu'il existe un sous-espace E de dimension n dans $\mathbf{R}^{2^n}$ tel que $d_{BM}(B_1^n, E \cap B_\infty^{2^n}) = 1$. Peut-on remplacer 2^n par un nombre inférieur ?

Exercice 2 (Polaire d'un polytope). On rappelle qu'un polytope (convexe) de $\mathbf{R}^n$ est l'enveloppe convexe d'une partie finie. Montrer que le polaire d'un polytope contenant 0 dans son intérieur est encore un polytope. Montrer que toute section/projection d'un polytope est un polytope.

Exercice 3 (Zonotopes). On appelle **zonotope** de $\mathbf{R}^n$ un polytope qui peut s'écrire comme une somme de segments. Par exemple le cube est un zonotope car

$$[-1,1]^n = [-e_1, e_1] + \cdots + [-e_n, e_n].$$

1. Montrer qu'un polytope est un zonotope si et seulement si c'est la projection orthogonale d'un cube de dimension supérieure.
2. Montrer qu'en dimension 2, tout polygone symétrique est un zonotope.
3. Montrer qu'en dimension 3, l'octaèdre n'est pas un zonotope.
4. En déduire que si $n \geqslant 3$, il n'existe jamais de sous-espace $E \subset \mathbf{R}^N$ de dimension n tel que $d_{BM}(B_\infty^n, E \cap B_1^N) = 1$.

Exercice 4 (Largeur moyenne dans le plan). Montrer qu'en dimension 2, la largeur moyenne d'un corps convexe est proportionnelle à son périmètre (la constante de proportionalité ne dépendant pas du corps convexe). Indication : commencer par le montrer pour les zonotopes.

Ainsi en dimension 2, l'inégalité de Urysohn coïncide avec l'inégalité isopérimétrique.

Exercice 5 (Peut on prendre $\varepsilon = 0$ dans le théorème de Dvoretzky ?)

1. Est-il vrai que pour tout entier k, il existe $n \in \mathbf{N}$ et $E \subset \mathbf{R}^n$ sous-espace de dimension k tel que $d_{BM}(\ell_2^k, E \cap \ell_\infty^n) = 1$?
2. Est-ce que pour tout entier k, il existe $E \subset \ell_\infty$ sous-espace de dimension k tel que $d_{BM}(\ell_2^k, E) = 1$?
3. Est-ce que pour tout entier k, il existe $E \subset c_0$ sous-espace de dimension k tel que $d_{BM}(\ell_2^k, E) = 1$?

Exercice 6 (Théorème de Dvoretzky avec des sections rondes).

1. Montrer que si $\mathcal{E}$ est un ellipsoïde dans $\mathbf{R}^n$, alors il existe un sous-espace F de dimension $\lceil n/2 \rceil$ tel que $\mathcal{E} \cap F$ est une boule euclidienne.
2. En déduire la version suivante du théorème de Dvoretzky : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c(\varepsilon) > 0$ telle que pour tout corps convexe symétrique $K \subset \mathbf{R}^n$, il existe un sous-espace E de dimension $k \geqslant c(\varepsilon) \log n$ et une constante $\lambda > 0$ tels que

$$\lambda B_2^n \cap E \subset K \cap E \subset \lambda(1+\varepsilon) B_2^n \cap E.$$

Exercice 7 Calculer quelle est la dimension des sections presque euclidiennes qui est donnée par la preuve du théorème de Dvoretzky pour les boules-unités des espaces ℓ_p^n (on pourra séparer les cas $p \leqslant 2$ et $p \geqslant 2$).

Exercice 8 (Le théorème de Dvoretzky est optimal). Soit K un corps convexe symétrique tel que $\mathcal{E}_J(K) = B_2^n$, et $M = \int_{S^{n-1}} \|x\|_K d\sigma(x)$. Soit E un sous-espace aléatoire de dimension k, distribué selon la mesure $\mu_{n,k}$. On suppose (pour simplifier) que k divise n et que

$$\mathbf{P}\left(\forall x \in S^{n-1} \cap E, \quad \|x\|_K \leqslant 2M\right) \geqslant 1 - 1/n. \tag{1}$$

1. Montrer qu'il existe une décomposition de $\mathbf{R}^n$ en somme directe orthogonale de n/k sous-espaces de dimension k telle que chacun de ces sous-espaces vérifie (1).
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\|x\|_K \leqslant 2M\sqrt{n/k}\|x\|_2$, et donc que $k \leqslant 4M^2 n$.

On a montré en cours l'existence de sections presque euclidiennes de dimension de l'ordre de $M^2 n$; cet exercice montre que l'on ne peut pas faire mieux (dans un certain sens).