Feuille d'exercices numéro 6
Autour du théorème de Gluskin.

Exercice 1 Donner une minoration numérique de la valeur de constante qui intervient dans le théorème de Gluskin.

Exercice 2 (La théorie non-symétrique)

Dans cet exercice on cherche à étendre la théorie aux corps convexes non nécessairement symétriques, en remplaçant les transformations linéaires par les transformations affines. Si K et L sont deux corps convexes non nécessairement symétriques de $\mathbf{R}^n$, on définit leur distance de Banach–Mazur (non symétrique) comme

$$\tilde{d}_{BM}(K,L) = \inf \left\{ \frac{b}{a};\ \ \exists T \in GL_n(\mathbf{R}), x, y \in \mathbf{R}^n \text{ t.q. } a(K-x) \subset T(L-y) \subset b(K-x) \right\}.$$

1. Montrer que si K et L sont symétriques, alors $d_{BM}(K,L) = \tilde{d}_{BM}(K,L)$.
2. Montrer que si Δ et Δ' sont deux simplexes de $\mathbf{R}^n$, alors $\tilde{d}_{BM}(\Delta,\Delta') = 1$. Dans la suite on note Δ_n un simplexe quelconque de $\mathbf{R}^n$.
3. Montrer que $\tilde{d}_{BM}(\Delta_n, B_2^n) = n$. Montrer plus généralelement que si K est un corps convexe symétrique, alors $\tilde{d}_{BM}(\Delta_n, K) = n$ (pour la majoration, on pourra considérer un simplexe de volume maximal inscrit dans K).
4. (*) On appelle ellipsoïde affine l'image d'un ellipsoïde par une translation. Montrer la version non-symétrique du théorème de John : si $K \subset \mathbf{R}^n$ est un corps convexe non nécessairement symétrique, B_2^n est l'ellipsoïde affine de volume maximal inscrit dans K si et seulement si il existe des points de contact $(x_i) \in \partial K \cap S^{n-1}$ et des nombres positifs c_i tels que $\sum c_i x_i = 0$ et $\sum c_i |x_i\rangle\langle x_i| = \mathrm{Id}$.
5. En déduire que $\tilde{d}_{BM}(K, B_2^n) \leqslant n$ pour tout corps convexe non nécessairement symétrique.
6. Montrer que le théorème de Dvoretzky s'étend au cadre des corps convexes non nécessairement symétriques.

Remarque : Il découle de la question 5. que si K, L sont deux corps convexes de $\mathbf{R}^n$ non nécessairement symétriques, alors $\tilde{d}_{BM}(K,L) \leqslant n^2$. On ne connaît pas l'ordre de grandeur du diamètre de la version non-symétrique du compact de Banach–Mazur. La meilleure estimation connue est

$$n \leqslant \sup_{K,L} \tilde{d}_{BM}(K,L) \leqslant C n^{4/3} (\log n)^9.$$

Exercice 3 (Une variante de la construction de Gluskin)

Soit $x_1, \dots, x_{2n}$ des points aléatoires sur S^{n-1}, distribués selon la mesure uniforme σ et indépendants. On pose $K = \mathrm{conv}\{\pm x_1, \dots, \pm x_{2n}\}$, et A la matrice $2n \times n$ dont les lignes sont $x_1, \dots, x_{2n}$, de sorte que $K = A^*(B_1^{2n})$. On note $s_1(A) \geqslant \dots \geqslant s_n(A)$ les valeurs singulières de A.

1. Montrer que
$$K \supset \frac{s_n(A)}{\sqrt{2n}} B_2^n.$$
2. Montrer que $s_1(A) \leqslant C$ avec grande probabilité, où C est une constante universelle.
3. Vous pouvez essayer de montrer que $s_n(A) \geqslant c$ avec grande probabilité mais c'est plus difficile (admettons-le).
4. Par les questions 1. et 3., $K \supset \frac{c'}{\sqrt{n}} B_2^n$ avec grande probabilité. Utiliser ce fait pour montrer que si K et K' sont deux copies indépendantes de cette construction, on a $d_{BM}(K,K') \geqslant c'' n$ avec grande probabilité (adapter la preuve du cours).

Autrement dit, le fait d'ajouter les vecteurs de la base canonique comme sommets à K n'est pas fondamental dans la construction de Gluskin, mais cela permet de simplifier la preuve du théorème.