**Feuille d'exercices numéro 7**
Géométrie des états quantiques.

**Exercice 1** Soient $d_1, d_2 > 1$ et $\mathcal{H} = \mathbf{C}^{d_1} \otimes \mathbf{C}^{d_2}$. On pose $d = d_1 d_2$.

1. Que peut-on dire d'un état dont la norme de Hilbert–Schmidt vaut 1 ?
2. Montrer qu'il existe dans $\mathscr{M}_{sa}(\mathcal{H})$ une famille orthonormale (pour le produit scalaire de Hilbert–Schmidt) de cardinal $d$ formée d'états séparables.
3. Montrer qu'il existe dans $\mathscr{M}_{sa}(\mathcal{H})$ une famille orthonormale (pour le produit scalaire de Hilbert–Schmidt) de cardinal $d$ formée d'états intriqués.

**Exercice 2** (**Transposition partielle**) Soit $\rho$ un état sur $\mathbf{C}^{d_1} \otimes \mathbf{C}^{d_2}$. On définit sa *transposition partielle* par

$$TP(\rho) = (\mathrm{Id} \otimes T)(\rho),$$

où $\mathrm{Id} : \mathscr{M}_{sa}(\mathbf{C}^{d_1}) \to \mathscr{M}_{sa}(\mathbf{C}^{d_1})$ est l'application identité et $T : \mathscr{M}_{sa}(\mathbf{C}^{d_2}) \to \mathscr{M}_{sa}(\mathbf{C}^{d_2})$ est l'application de transposition $A \mapsto A^t$.

Montrer que si $\rho$ est séparable, alors $TP(\rho) \geqslant 0$. On peut montrer que la réciproque est vraie sur $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$ ou $\mathbf{C}^3 \otimes \mathbf{C}^2$ — et seulement dans ces cas.

**Exercice 3** Soit $x \in \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$ le vecteur

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2).$$

Pour quelles valeurs de $t$ est-ce que l'état $t\frac{\mathrm{Id}}{2} + (1-t)|x\rangle\langle x|$ est séparable ?

**Exercice 4** Soit $\mathcal{H} = \mathbf{C}^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{C}^{d_N}$ un produit tensoriel d'espaces de Hilbert. Montrer que le centre de gravité de $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ est l'état maximalement mélangé $\frac{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}}{\dim \mathcal{H}}$.

**Exercice 5** **(Différentes écritures d'un état comme combinaison convexe d'états purs)** Soient deux états sur $\mathbf{C}^d$ donnés par

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} p_i |x_i\rangle\langle x_i|,$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N} q_i |y_i\rangle\langle y_i|$$

avec $p_i, q_i \geqslant 0$ et $\sum p_i = \sum q_i = 1$. Montrer que $\rho = \sigma$ si et seulement si il existe une matrice unitaire $U \in \mathcal{U}(\mathbf{C}^N)$ telle que pour tout $i$,

$$\sqrt{q_i} y_i = \sum_{j=1}^{N} U_{ij} \sqrt{p_j} x_j.$$

**Exercice 6** Identifier les corps convexes suivants :

1. $B_1^n \hat{\otimes} B_1^n$.
2. $B_2^n \hat{\otimes} B_2^n$.

**Exercice 7** Déterminez d'ordre de grandeur de la distance

$$d_{BM}\left((B_2^2)^{\hat{\otimes} N}, B_2^{2^N}\right)$$

lorsque $N$ tend vers $+\infty$.