Feuille d'exercices numéro 8
Théorie classique de l'information.

Exercice 1 (**Information mutuelle**)
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Montrer que

$$0 \leqslant I(X:Y) \leqslant \min(H(X), H(Y)).$$

Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité de gauche si et seulement si X et Y sont indépendantes, et qu'il y a égalité dans l'inégalité de droite si et seulement si l'une des variables est une fonction (déterministe) de l'autre.

Exercice 2 (**Calculs de capacité**) Calculer la capacité des canaux suivants

1. Le canal $C_1 : \{0,1\} \to \{0,1\}$ qui change la valeur d'un bit avec probabilité p.
2. Le canal $C_2 : \{0,1\} \to \{0,1,e\}$ tel que $C(i) = i$ avec probabilité $1-p$, et $C(i) = e$ avec probabilité p (pour $i = 0,1$).
3. Le canal $C_3 : \{A, B, \cdots, Z\} \to \{A, B, \cdots, Z\}$ qui renvoie comme sortie
   - avec probabilité $1/2$, la même lettre qu'à l'entrée.
   - avec probabilité $1/2$, la lettre suivant la lettre d'entrée dans l'ordre alphabétique (avec la convention que la lettre suivant Z est A).

   Pour C_3, décrire une méthode simple d'encodage/décodage optimale.

Exercice 3 (**Capacité du canal-produit**) Soient $C_1 : E_1 \to S_1$ et $C_2 : E_2 \to S_2$ deux canaux (qui se comportent de manière indépendante). Quelle est la capacité du canal-produit $C_1 \times C_2 : E_1 \times E_2 \to S_1 \times S_2$, en fonction des capacités de C_1 et C_2 ?

Exercice 4 (**Caractérisation axiomatique de l'entropie**)
On note $P_n = \{x \in (\mathbf{R}^+)^n \text{ t.q. } \sum x_i = 1\}$ et on se donne une suite $H_n : P_n \to \mathbf{R}^+$ de fonctions qui vérifient les axiomes suivants

1. Pour chaque n, la fonction H_n est continue.
2. La suite $a_n = H_n(1/n, \ldots, 1/n)$ est croissante..
3. (Axiome de regroupement) On l'égalité

$$H_{n_1+\cdots+n_k}(p_{1,1}, \ldots, p_{1,n_1}, \ldots, p_{k,1}, \ldots, p_{k,n_k}) = H_k(p_1, \ldots, p_k) + \sum_{i=1}^{k} p_i H_{n_i}\left(\frac{p_{i,1}}{p_i}, \ldots, \frac{p_{i,n_i}}{p_i}\right),$$

   où l'on a noté $p_i = p_{i,1} + \cdots + p_{i,n_i}$.

Montrer qu'il existe $K \geqslant 0$ tel que

$$H_n(p_1, \ldots, p_n) = -K \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i.$$

Exercice 5 (*) (**Deuxième théorème de Shannon**) Soit $C : E \to S$ un canal et $R > \mathrm{Cap}(C)$. Soit pour tout n, $\mathrm{Enc}_n : \{0,1\}^{nR} \to E^n$ et $\mathrm{Dec}_n : S^n \to \{0,1\}^{nR}$, et

$$p_n = \max_{w \in \{0,1\}^{nR}} \mathbf{P}(\mathrm{Dec}_n(C^n(\mathrm{Enc}_n(w))) \neq w).$$

Le but de l'exercice est de montrer que (p_n) ne peut pas tendre vers 0. On note aussi

$$\tilde{p}_n = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w \in \{0,1\}^{nR}} \mathbf{P}(\mathrm{Dec}_n(C^n(\mathrm{Enc}_n(w))) \neq w),$$

alors on a $p_n \geqslant \tilde{p}_n$.

1. Montrer que si $\mathbf{X} = (X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une variable aléatoire à valeurs dans E^n, et $\mathbf{Y} = C^n(\mathbf{X})$, alors $I(\mathbf{X} : \mathbf{Y}) \leqslant n \operatorname{Cap}(C)$.
2. Soit W uniformément distribué sur $\{0,1\}^{nR}$, et $\hat{W} = \operatorname{Dec}_n(C^n(\operatorname{Enc}_n(W)))$.
   Montrer que $I(W : \hat{W}) \leqslant I(\operatorname{Enc}_n(W) : C^n(\operatorname{Enc}_n(W))$.
3. Montrer que $H(W, \hat{W}) - H(\hat{W}) \leqslant 1 + nR \cdot \tilde{p}_n$.
4. Conclure.

On peut également montrer que $(\tilde{p}_n)$, et donc (p_n), tendent nécessairement vers 1.