Université Claude Bernard Mathématiques
M2 Convexité en grande dimension et théorie quantique de l'information

Feuille d'exercices numéro 9
Théorie quantique de l'information.

Exercice 1

1. Montrer que la capacité d'un canal classique $C : E \to S$ est donnée par
$$\mathrm{Cap}(C) = \sup_{\{p_i,\pi_i\}} H\left(C\left(\sum p_i\pi_i\right)\right) - \sum p_i H(C(\pi_i)),$$
où le supremum est pris toutes les familles finies telles que $p_i \geqslant 0$ et $\sum p_i = 1$, (π_i) étant des mesures de probabilité sur E. Dans cette formule, on comprend $H(C(\pi))$ comme $H(C(X))$, où X est une variable aléatoire de loi π.
2. Notez la similarité avec la formule donnant la capacité (pour un encodage séparable) d'un canal quantique $\Phi : \mathscr{M}(\mathbf{C}^d) \to \mathscr{M}(\mathbf{C}^d)$
$$\mathrm{Cap}(\Phi) = \sup_{\{p_i,\rho_i\}} S\left(\Phi\left(\sum p_i\rho_i\right)\right) - \sum p_i S(\Phi(\rho_i)).$$
Montrer que dans cette formule, on peut se restreindre aux suites (p_i) de longueur inférieure ou égale à d^2, et que l'on peut se restreindre à choisir les états (ρ_i) purs.

Exercice 2 Soit $\Phi : \mathscr{M}(\mathbf{C}^d) \to \mathscr{M}(\mathbf{C}^d)$ un canal quantique tel que $\Phi(\mathcal{D}(\mathbf{C}^d))$ ne soit pas un singleton. Montrer que $\chi(\Phi) > 0$.

Exercice 3 (**Théorème de Choi**)
Soit $\Phi : \mathscr{M}(\mathbf{C}^d) \to \mathscr{M}(\mathbf{C}^k)$ une application $\mathbf{C}$-linéaire. Montrer l'équivalence entre les énoncés suivants :

1. $\forall n \in \mathbf{N}$, $\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{M}(\mathbf{C}^n)} : \mathscr{M}(\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^n) \to \mathscr{M}(\mathbf{C}^k \otimes \mathbf{C}^n)$ est positive.
2. $\exists N \in \mathbf{N}$, $\exists A_1, \ldots, A_N \in \mathscr{M}(\mathbf{C}^d, \mathbf{C}^k)$ tels que $\Phi(X) = \sum A_i X A_i^*$ pour tout $X \in \mathscr{M}(\mathbf{C}^d)$.
3. $\exists N \in \mathbf{N}$, $\exists V \in \mathscr{M}(\mathbf{C}^d, \mathbf{C}^k \otimes \mathbf{C}^N)$ tel que $\Phi(X) = \mathrm{tr}_{\mathbf{C}^N} VXV^*$ pour tout $X \in \mathscr{M}(\mathbf{C}^d)$.

Indication : l'implication la plus difficile est (1) $\Rightarrow$ (2) ; on pourra choisir $n = d$, appliquer l'opération $\Phi \otimes \mathrm{Id}$ à la matrice positive
$$E = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ij} = \left|\sum_i e_i \otimes e_i\right\rangle \left\langle \sum_i e_i \otimes e_i\right|$$
(où (e_i) est la base canonique de $\mathbf{C}^d$ et $E_{ij} = |e_i\rangle\langle e_j|$), puis diagonaliser $(\Phi \otimes \mathrm{Id})(E)$.
Quelle majoration de N donne la preuve ?

Exercice 4 (**Canal "dépolarisant"**)
On considère l'application $\Phi : \mathscr{M}(\mathbf{C}^d) \to \mathscr{M}(\mathbf{C}^d)$ définie par
$$\Phi(X) = \mathrm{tr}(X)\frac{\mathrm{Id}}{d}.$$
Montrer que Φ est un canal quantique, et que $\Phi(X) = \int_{\mathcal{U}(d)} UXU^* d\mu(U)$, où μ est la mesure de Haar. Expliciter des matrices $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant N} \in \mathscr{M}(\mathbf{C}^d)$ telles que
$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N U_i X U_i^\dagger.$$
Montrer que la plus petite valeur possible de N est d^2.