Université Claude Bernard Mathématiques
M2 Convexité en grande dimension et théorie quantique de l'information

Examen partiel

Exercice 1

N'hésitez pas à admettre un résultat pour pouvoir continuer.

On note σ la mesure de probabilité uniforme sur S^{n-1} ; on rappelle que c'est la seule mesure de probabilité invariante par toutes les rotations.

1. Pour $x \in S^{n-1}$ et $\varepsilon \leqslant 1$, on pose $C(x,\varepsilon) = \{y \in S^{n-1} \text{ t.q. } \|x-y\|_2 \leqslant \varepsilon\}$. Montrer que
$$\sigma(C(x,\varepsilon)) \geqslant (\varepsilon/3)^n$$
(on pourra faire le lien avec le cardinal d'un ε-réseau).
2. Dans cette question, K désigne un corps convexe symétrique de $\mathbf{R}^n$ vérifiant $B_2^n \subset K$ et on pose $A = \left(\frac{\operatorname{vol} K}{\operatorname{vol} B_2^n}\right)^{1/n}$. On rappelle que
$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|\theta\|_K^n} d\sigma(\theta) = \frac{\operatorname{vol} K}{\operatorname{vol} B_2^n}$$
   (a) En déduire (μ désignant la mesure de Haar sur $\mathcal{O}(n)$),
$$\int_{\mathcal{O}(n)} \int_{S^{n-1}} \left(\frac{1}{\|U(\theta)\|_K \|\theta\|_K}\right)^n d\sigma(\theta) d\mu(U) = A^{2n}.$$
   (b) En déduire qu'il existe une rotation $U_0 \in \mathcal{O}(n)$ telle que, si l'on pose
$$N(x) = \frac{1}{2}(\|x\|_K + \|U_0(x)\|_K),$$
   on a
$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{N(\theta)^{2n}} d\sigma(\theta) \leqslant A^{2n}.$$
   (c) Soit $x \in S^{n-1}$. Montrer que si $N(x) \leqslant t$, alors $N(y) \leqslant 2t$ pour tout $y \in C(x,t)$.
   (d) Montrer que $N \geqslant 1/(12A^2)$ et en déduire que
$$B_2^n \subset K \cap U_0(K) \subset 12A^2 \cdot B_2^n.$$
3. En déduire le résultat suivant : il existe une constante C telle que pour tout n, il existe une rotation $V \in \mathcal{O}(n)$ vérifiant
$$d_{BM}(B_1^n \cap V(B_1^n), B_2^n) \leqslant C.$$
4. La conclusion de la question précédente reste-t-elle vraie si on remplace B_1^n par B_∞^n ?

Exercice 2

Montrer (en utilisant les résultats du cours) que pour tout n, il existe un sous-espace E de dimension $k = \lfloor cn \rfloor$ de $\mathbf{R}^n$ tel que
$$d_{BM}(B_1^n \cap E, B_2^k) \leqslant 2,$$
où $c > 0$ est une constante.