Feuille 1
Topologies sur $B(\mathcal{H})$

On note $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie. On rappelle que $\mathcal{H}$ est muni la topologie forte (induite par la norme d'espace de Hilbert) et de la topologie forte, induite par la famille de semi-normes $(m_x)_{x\in\mathcal{H}}$, où pour $y \in \mathcal{H}$

$$m_x(y) = |\langle x, y\rangle|.$$

On note $B(\mathcal{H})$ l'ensemble des applications linéaires continues de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. On travaillera avec trois topologies sur $B(\mathcal{H})$ (il y en a d'autres : Wikipedia en recense 9) :

1. La topologie uniforme, induite par la norme d'opérateur (qui fait de $B(\mathcal{H})$ un espace de Banach). La terminologie boule-unité fait référence à la norme d'opérateur.
2. La topologie forte d'opérateur (SOT), ou simplement la topologie forte, induite par la famille de semi-normes $(n_x)_{x\in\mathcal{H}}$, où
$$n_x(T) = \|Tx\|.$$
3. La topologie faible d'opérateur (WOT), ou simplement la topologie faible, induite par la famille de semi-normes $(n_{x,y})_{x,y\in\mathcal{H}}$, où
$$n_{x,y}(T) = |\langle Tx, y\rangle|.$$

Exercice 1. Voici trois suites dans $B(\ell_2)$. Pour chacune, déterminer pour quelle(s) topologie(s) elle converge.

1. La suite (T_n) définie par
$$T_n(\xi_1, \xi_2, \cdots) = \left(\frac{1}{n}\xi_1, \frac{1}{n}\xi_2, \cdots\right).$$
2. La suite (S_n) définie par
$$S_n(\xi_1, \xi_2, \cdots) = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n \text{ places}}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots).$$
3. La suite (W_n) définie par
$$W_n(\xi_1, \xi_2, \cdots) = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n \text{ places}}, \xi_1, \xi_2, \cdots).$$

Exercice 2. Pour chacune des topologies, déterminer si l'application $A \mapsto A^*$ est continue.

Exercice 3. Pour chacune des topologies, déterminer si l'ensemble des opérateurs de rang fini est dense.

Exercice 4. Pour chacune des topologies, est-ce que la boule-unité est compacte ? séparable ?

Exercice 5. Pour chacune des topologies, déterminer si l'application de multiplcation $(A, B) \mapsto AB$ est continue, et à défaut si elle est séparément continue en chaque variable.

Indication : *Montrer que l'ensemble des opérateurs de carré nul est fortement dense.*

Exercice 6. Soit $\Phi : B(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire. Monter qu'il y a équivalence entre

1. Φ est continue pour la topologie faible d'opérateurs.
2. Φ est continue pour la topologie forte d'opérateurs.
3. Il existe une famille finie de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ telle que, pour tout $T \in B(\mathcal{H})$,
$$\Phi(T) = \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, Ty_k\rangle.$$

Exercice 7. Montrer que si $C \subset B(\mathcal{H})$ est convexe, on a équivalence

$$C \text{ est fermé pour la topologie faible d'opérateurs} \iff C \text{ est fermé pour la topologie forte d'opérateurs.}$$