**Feuille 2**
Opérateurs fermés, fermables, adjoint, extensions.

On note $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie.

**Exercice 1. De l'importance du choix du domaine**
On note $\mathcal{H} = L^2([0,1])$, et on considère des variantes de l'opérateur de dérivation.

1. On pose $\mathrm{Dom}\, T_1 = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1\}$ et pour $f \in \mathrm{Dom}\, T_1$, on pose $T_1 f = if'$.
2. On pose $\mathrm{Dom}\, T_2 = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1 \;:\; f(0) = f(1) = 0\}$ et pour $f \in \mathrm{Dom}\, T_2$, on pose $T_2 f = if'$.
3. On pose $\mathrm{Dom}\, T_3 = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1 \;:\; f(0) = f(1)\}$ et pour $f \in \mathrm{Dom}\, T_3$, on pose $T_3 f = if'$.

Les opérateurs (non bornés) $T_1, T_2, T_3$ sont-ils fermés ? fermables ? symétriques ? Déterminer leurs adjoints.

**Exercice 2. Fermable ?**
Soit $(e_n)$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ et $(\lambda_n)$ une suite de nombres complexes. On définit un opérateur (non borné) par $T(e_n) = \lambda_n e_1$, étendu par linéarité. Est-il fermable ?

**Exercice 3. Shift à poids**
Soit $(e_n)$ une base Hilbertienne de $\mathcal{H}$ et $(\lambda_n)$ une suite de nombres complexes. On définit un opérateur (non borné) par $T(e_n) = \lambda_n e_{n+1}$, étendu par linéarité. Déterminer la fermeture (si elle existe) et l'adjoint de $T$.

**Exercice 4.** Soit $T$ un opérateur (non borné) de domaine dense. Montrer l'équivalence

1. $T$ est symétrique,
2. Pour tout $x \in \mathrm{Dom}\, T$, on a $\langle x, Tx\rangle \in \mathbb{R}$,
3. $T \subset T^*$.

**Exercice 5. Un opérateur symétrique ayant plusieurs extensions auto-adjointes**
Montrer que pour tout nombre complexe $\alpha$ vérifiant $|\alpha| = 1$, l'opérateur $R_\alpha$ défini par

$$\mathrm{Dom}\, R_\alpha = \{f \in H^1(0,1) \;:\; f(0) = \alpha f(1)\}$$

et pour $f = \mathrm{Dom}\, R_\alpha$, par $R_\alpha f = if'$, est une extension auto-adjointe de l'opérateur $T_2$ de l'exercice 1 (on a noté $H^1(0,1) \subset L^2(0,1)$ l'espace des primitives d'une fonction de $L^2(0,1)$).

**Exercice 6. Un opérateur symétrique sans extension auto-adjointe**

1. Montrer d'abord les faits suivants
   (a) Soit $C$ un opérateur (non borné) symétrique, et $A$ un opérateur (non borné) vérifiant $A \subset C$ et $\mathrm{Ran}(A + i\mathrm{Id}) = \mathrm{Ran}(C + i\mathrm{Id})$. Montrer que $A = C$.
   (b) Soit $A$ un opérateur (non borné) symétrique tel que $\mathrm{Ran}(A + i\mathrm{Id}) = \mathcal{H}$ et $\mathrm{Ran}(A - i\mathrm{Id}) \neq \mathcal{H}$. Montrer que $A$ n'a pas d'extension auto-adjointe.
2. Soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = e_n - e_{n+1}$, et on définit un opérateur (non borné) $T$ de domaine $\mathrm{Vect}\{u_n \;:\; n \geqslant 1\}$ en posant $T(u_n) = ie_n + ie_{n+1}$.
   (a) Vérifier que $T$ est symétrique.
   (b) A l'aide de la première partie, montrer que $T$ n'a pas d'extension auto-adjointe.