Université Claude Bernard — Mathématiques

M2 recherche — Théorie spectrale des opérateurs et mécanique quantique

Feuille 3

Projections, unitaires, isométries partielles, spectre.

On note $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie et $B(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$. On note P_E la projection orthogonale sur un sous-espace fermé $E \subset \mathcal{H}$.

Exercice 1. Soient E, F deux sous-espaces fermés de $\mathcal{H}$.

1. Montrer que $P_E P_F$ est une projection orthogonale (sur quel sous-espace ?) si et seulement si $P_E P_F = P_F P_E$.
2. Montrer que $P_E + P_F$ est une projection orthogonale si et seulement si $P_E P_F = 0$ si et seulement si $E \perp F$.

Exercice 2. Soit P une projection (i.e. vérifiant $P^2 = P$) telle que $\|P\| \leqslant 1$. Montrer que P est une projection orthogonale.

Exercice 3. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$, et S l'opérateur de shift défini par $S(e_n) = e_{n+1}$. Déterminer le spectre de S.

Exercice 4. Montrer que le spectre d'un opérateur unitaire est inclus dans le cercle-unité.

Exercice 5. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (p_n) pour qu'il existe un opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ tel que $\|T^n\| = p_n$ pour tout entier n.

Exercice 6. Montrer que l'ensemble des opérateurs inversibles est connexe.

Exercice 7. Soient E et F deus sous-espaces fermés de $\mathcal{H}$. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, $(P_E P_F)^n$ converge (pour quelle topologie ?) vers une limite à préciser.

Exercice 8. Déterminer si les ensembles suivants sont fermés pour chacune des trois topologies sur $B(\mathcal{H})$, et sinon essayer de décrire leur adhérence.

1. L'ensemble des isométries.
2. L'ensemble des opérateurs unitaires.
3. L'ensemble des opérateurs normaux.
4. L'ensemble des projections orthogonales.

Exercice 9. Déterminer les points extrémaux de $\{T \in B(\mathcal{H}) \ : \ \|T\| \leqslant 1\}$ et de $\{T \in B(\mathcal{H}) \ : \ T = T^*, \|T\| \leqslant 1\}$