Feuille 4

"The church of the larger Hilbert space".

Cette feuille introduit une idée qui reviendra plus tard dans le cours : pour étudier un opérateur T sur $\mathcal{H}$, il est parfois utile de voir $\mathcal{H}$ comme sous-espace d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}'$, et T comme un "bloc" d'un opérateur (plus simple) sur $\mathcal{H}'$. Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$ sont deux espaces de Hilbert, et $B \in B(\mathcal{H}')$. Alors B induit un opérateur $A \in B(\mathcal{H})$ en posant $Ax = P_{\mathcal{H}} Bx$, où $x \in \mathcal{H}$. Autrement dit, si on écrit B comme un opérateur par blocs selon la décomposition $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{\perp}$, on a

$$B = \begin{pmatrix} A & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$$

où $X \in B(\mathcal{H}^{\perp}, \mathcal{H})$, $Y \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}^{\perp})$ et $Z \in B(\mathcal{H}^{\perp}, \mathcal{H}^{\perp})$. Dans ce cas, on dit que B est une extension de A, ou que A est une compression de B.

Exercice 1. Toute contraction positive est la compression d'une projection orthogonale

Soit $A \in B(\mathcal{H})$ un opérateur positif vérifiant $0 \leqslant A \leqslant \mathrm{Id}$, c'est-à-dire que A est auto-adjoint et que les opérateurs A et $\mathrm{Id} - A$ sont positifs (=à spectre inclus dans $\mathbb{R}^+$).

1. Montrer qu'il existe un opérateur positif R tel que $R^2 = A - A^2$, et que de plus R et A commutent.
2. Montrer que l'opérateur B défini sur $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ par

$$B = \begin{pmatrix} A & R \\ R & \mathrm{Id} - A \end{pmatrix}$$

est une projection orthogonale qui est une extension de A.

Exercice 2. Toute contraction est la compression d'un unitaire ...

Soit $A \in B(\mathcal{H})$ une contraction (i.e. $\|A\| \leqslant 1$).

1. Justifier qu'il existe des opérateurs auto-adjoints positifs S,T tels que $S^2 = 1 - AA^*$ et $T^2 = 1 - A^*A$.
2. Montrer que $Ap(T^2) = p(S^2)A$ pour tout polynôme p. En déduire que $AT = SA$.
3. Montrer que l'opérateur U défini sur $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ par

$$U = \begin{pmatrix} A & S \\ T & -A* \end{pmatrix}$$

est un unitaire qui est une extension de A.

Exercice 3. ... et cela peut même être vrai pour tous les itérés !

On reprend les notations de l'exercice précédent. On pose $\mathcal{H}' = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}$ et on considère $\mathcal{H}$ comme un sous-espace de $\mathcal{H}'$ en idenfiant $\mathcal{H}$ à sa copie d'indice 0 dans la somme directe. Vérifier que l'opérateur V défini sur $\mathcal{H}'$ comme suit (le bloc A ayant pour coordonnées $(0,0)$)

$$V = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \mathrm{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \mathrm{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & S & A & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -A^* & T & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Id} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Id} & 0 \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

est un unitaire qui a la propriété que pour tout $k \in \mathbb{N}$, V^k est une extension de A^k. Lorsque $\mathcal{H}$ est de dimension finie, peut-on construire une extension ayant cette propriété sur un espace de dimension finie ?

Exercice 4. Théorème ergodique de von Neumann

Soit U un unitaire sur $\mathcal{H}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k = P$$

(pour quelle topologie ?), où P est la projection orthogonale sur le sous-espace $\{x \in \mathcal{H} \ : \ Ux = x\}$.

Le même résultat est-il vrai si on suppose seulement que U est une contraction ?

Exercice 5. Inégalité de von Neumann

Soit $A \in B(\mathcal{H})$ une contraction, et $p \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. Montrer que

$$\|p(A)\| \leqslant \sup_{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ |\lambda| \leqslant 1} |p(\lambda)|.$$