Feuille 5

Semigroupes d'opérateurs.

Dans toute la feuille $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert complexe séparable, et $B(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$. Un semigroupe d'opérateurs est une famille $(T_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ d'opérateurs bornés telle que $T_0 = \mathrm{Id}$, et pour tous $s, t \geqslant 0$, on ait $T_sT_t = T_{s+t}$. Un semigroupe d'opérateurs (T_t) est dit uniformément continu (resp. fortement continu) si l'application $t \mapsto T_t$ est continue quand $B(\mathcal{H})$ est muni de la topologie uniforme (resp. forte d'opérateurs).

On utilisera l'intégrale de Bochner, qui généralise l'intégrale de Riemann à des fonctions à valeurs dans un espace de Banach X : si $f : [a, b] \to X$ est une fonction continue, l'élément $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in X$ est défini en approximant f uniformément par une suite de fonctions constantes par morceaux. On vérifie facilement que l'intégrale est bien définie, linéaire et satisfait l'inégalité

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 1. Soit Z un opérateur borné. Définir $\exp(tZ)$ pour $t \geqslant 0$ puis montrer que $(\exp(tZ))_{t\geqslant 0}$ est un semigroupe d'opérateurs uniformément continu.

Exercice 2. On montre que tout semigroupe d'opérateurs uniformément continu (T_t) est de la forme de l'exercice précédent.

1. Justifier que pour $h > 0$ assez petit, l'opérateur
$$X = \int_0^h T_s\,\mathrm{d}s$$
est inversible. On pose $Z = X^{-1}(T_h - \mathrm{Id})$.
2. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a
$$T_t - \mathrm{Id} = Z \int_0^t T_s\,\mathrm{d}s.$$
3. En déduire que $T_t = \exp(tZ)$ pour tout $t \geqslant 0$

Exercice 3. Soit (T_t) un semigroupe d'opérateurs fortement continu.

1. A l'aide du théorème de Banach–Steinhaus, montrer que la fonction $t \mapsto \|T_t\|$ est localement bornée.
2. Montrer qu'il existe des constantes réelles M et β telles que, pour tout $t \geqslant 0$,
$$\|T_t\| \leqslant Me^{\beta t}.$$

Exercice 4. Soit (T_t) un semigroupe d'opérateurs fortement continu. On définit un opérateur non-borné Z (appelé générateur de (T_t)) par la formule

$$Zf = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T_t f - f),$$

là où elle a un sens (on demande que la limite existe pour la topologie de la norme d'espace de Hilbert).

1. Pour $h, s > 0$, on définit des opérateurs (bornés ?) Z_h et Y_s par

$$Z_h f = \frac{1}{h}(T_h f - f),$$

$$Y_s f = \frac{1}{s} \int_0^s T_u f \,\mathrm{d}u.$$

   Montrer la relation $Z_h Y_s = Y_s Z_h = Z_s Y_h = Y_h Z_s$.
2. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{H}$ et $s > 0$, $Y_s f \in \operatorname{Dom} Z$ et en déduire que $\operatorname{Dom} Z$ est dense.
3. Montrer que Z est fermé.
4. Soit $f \in \operatorname{Dom} Z$. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $T_t f \in \operatorname{Dom} Z$ et que

$$Z_t f = Y_t Z f = Z Y_t f.$$

Exercice 5. Soit H un opérateur auto-adjoint (non borné). Montrer que $(\exp(itH))_{t \geqslant 0}$ (défini par calcul fonctionnel) définit un semigroupe d'opérateurs fortement continu à valeurs dans les opérateurs unitaires.

Exercice 6. On montre le théorème de Stone : tout semigroupe d'opérateurs (T_t) fortement continu à valeurs dans les opérateurs unitaires est de la forme de l'exercice précédent. Soit Z le générateur de (T_t).

1. Montrer que (T_t^*) est un semigroupe d'opérateurs fortement continu de générateur $-Z$.
2. Montrer que iZ est auto-adjoint, puis que $T_t = \exp(tZ)$ au sens du calcul fonctionnel.

En général, il existe un critère (théorème de Hille–Yoshida) pour décider si un opérateur non-borné Z est le générateur d'un semi-groupe d'opérateurs fortement continu ; la difficulté est de donner un sens à l'expression $\exp(tZ)$.